Praktikum zur Vorlesung

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Zhangxian Wang

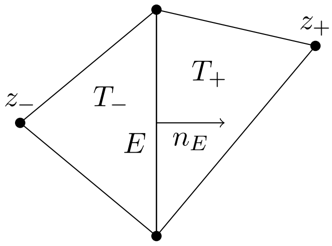
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Projekt 3

Abgabe am **Montag, den 27.11.2017, 10 Uhr**

Basisfunktionen. Für eine Kante E aus $\mathcal{T}$ mit Normalenvektor n_E, definiert

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \frac{|E|}{2|T_+|}(z_+ - x) & \text{für } x \in T_+, \\ \frac{-|E|}{2|T_-|}(z_- - x) & \text{für } x \in T_-, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$



eine Basisfunktion auf $RT^0(\mathcal{T}_h)$ (siehe Vorlesung).

Seien $T_+ \in \mathcal{T}$ das i-te Element und $T_- \in \mathcal{T}$ das j-te Element in `n4e` mit gemeinsamer innerer Kante $E \subset T_+ \cap T_-$. Der Index von E sei e, dann gibt es $k, r \in \{1, 2, 3\}$, so dass

$$e = \texttt{s4e(j,k)} \text{ und } e = \texttt{s4e(i,r)}.$$

Aufgabe 1
Kommentiere die Zeilen 10 bis 13 von `sides.m`, in denen `s4e`, `sign_s4e` und `n4s` aufgestellt werden.

Für `sign_s4e` gilt

$$\texttt{sign\_s4e(j,k)} = -1 \text{ und } \texttt{sign\_s4e(i,r)} = 1.$$

Äußeren Kanten ist der Wert -1 zugeordnet.

Aufgabe 2
Erstelle für eine selbstgewählte Triangulierung des Quadrates mit den Eckpunkten $(0, 1), (1, 0), (-1, 0)$ und $(0, -1)$ **per Hand** die Felder `c4n, n4e, Db, Nb, s4e, n4s` und `sign_s4e`. Dabei sollen weder `Db` noch `Nb` leer sein. Für ein Dreieck j soll in `s4e` die lokal i-te Kante dem lokal i-tem Knoten in `n4e` gegenüberliegen.

Lokale Steifigkeitsmatrix. Mit Hilfe von $\sum_{k=1}^{3} \varphi_{z_k}(x) z_k = x$ und $\sum_{k=1}^{3} \varphi_{z_k}(x) = 1$ erhält man für die Einträge der lokalen Steifigkeitsmatrix

$$A_{ij,T} = \int_T \psi_{E_i} \cdot \psi_{E_j} \, dx = \sigma_{E_i,T}\sigma_{E_j,T} \frac{|E_i||E_j|}{4|T|} \sum_{k,r=1}^{3} (z_k - z_i) \cdot (z_r - z_j) \frac{1 + \delta_{kr}}{12},$$

wobei $\sigma_{E_i,T} = \pm 1$ dem der Kante $E_i \subset T$ in `sign_s4e` zugeordneten Vorzeichen entspricht.

Aufgabe 3

Seien P, Q die Koeffizientenvektoren von $p_h, q_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ zur Kanten-Basis $\{\psi_E\}$ von $RT^0(\mathcal{T}_h)$ und V der Koeffizientenvektor von $v_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$ zur Basis $\{\chi_T\}$ von $\mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$. Erstelle eine Matlab-Funktion zur Assemblierung der Matrizen A, B mit

$$\int_\Omega p_h \cdot q_h \; dx = P^T \cdot A \cdot Q, \quad \int_\Omega \operatorname{div} q_h \cdot v_h \; dx = Q^T \cdot B \cdot V. \tag{1}$$

Teste die Richtigkeit der Implementierung mithilfe selbstgewählte Vektorfelder p_h, q_h und Funktionen v_h.