Praktikum zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Zhangxian Wang

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Projekt 4

Abgabe am **Dienstag, den 12.12.2017, 10 Uhr**

Gemischtes Poisson-Problem. Diskretisierung des dualen gemischten Poisson-Problems führt auf die Formulierung: Finde $(u_h, p_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$, so dass $u_h \cdot n = g$ auf Γ_N und

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_h \cdot v_h \, dx + \int_\Omega p_h \operatorname{div} v_h \, dx &= \int_{\Gamma_D} p_D v_h \cdot n \, ds, \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} u_h \, dx &= -\int_\Omega f \cdot q_h \, dx. \end{aligned} \tag{1}$$

für alle $(v_h, q_h) \in RT^0_N(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$.

Neumann-Randbedingung. Für $u_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ ist $u_h \cdot n_E = const$ auf Kanten $E \subset \mathcal{E}_h$. Approximiere die Randbedingung $u_h \cdot n = g$ auf Γ_N durch

$$u_h \cdot n_E = g(\overline{x}_E), \text{ für alle } E \subset \Gamma_N. \tag{2}$$

Dabei sei $\overline{x}_E$ der Mittelpunkt der Kante E.

Aufgabe 1
Konstruiere eine Matrix $C \in R^{\#\mathcal{E} \times \#\Gamma_N}$, so dass (2) äquivalent ist zu

$$C^T \cdot U = G,$$

mit $G = (g_h(\overline{x}_{E_1}), \ldots, g_h(\overline{x}_{E_K}))^T$, $E_i \subset \Gamma_N$, und dem Koeffizientenvektor U von u_h bezüglich der Kantenbasis $\{\psi_E\}$ von $RT^0(\mathcal{T}_h)$.

Argumentiere, dass Matrizen A, B, C und Vektoren Λ, P_D, F, G existieren, so dass (1) äquivalent ist zu

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B^T & 0 & 0 \\ C^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ P \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_D \\ F \\ G \end{bmatrix}$$

mit den Koeffizientenvektoren U, P von $(u_h, p_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$.

Schreibe ein Matlab-Programm, um eine Lösung von (1) zu berechnen. Teste die Implementierung für $\Omega = (0,1)^2$, $g = -1$, $f = 1$ und $p_D = 0$. Visualisiere die Lösung mithilfe des Matlab-Programms `show_rt.m`.

Bestimme experimentelle Konvergenzraten auf uniform verfeinerten Triangulierungen von $\Omega = (0,1)^2$ mithilfe der exakten Lösung $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ und von $\Omega = (-1,1)^2 \setminus ([-1,0] \times [0,1])$ mithilfe der exakten Lösung $u(r,\phi) = r^{2/3}\sin(2\phi/3)$ in Polarkoordinaten.

Aufgabe 2

Implementiere die Diskretisierung des Stokes-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u \qquad &= 0, \end{aligned}$$

mit $P1$ Finite Elementen für u und p. Teste die Implementierung für $\Omega = (-1,1)^2$, $\Gamma_{\mathrm{D}} = \partial\Omega$, und

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= \pi \begin{bmatrix} \sin(2\pi x_2)\sin^2(\pi x_1) \\ -\sin(2\pi x_1)\sin^2(\pi x_2) \end{bmatrix}, \\ p(x_1,x_2) &= \cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2). \end{aligned}$$