Praktikum zur Vorlesung

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Zhangxian Wang

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Projekt 5

Abgabe am **Dienstag, den 12.12.2017, 10 Uhr**

Aufgabe 1

Implementiere die Diskretisierung des Stokes-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u \quad &= 0, \end{aligned}$$

mit $P1$ Finite Elementen für u und p. Teste die Implementierung für $\Omega = (-1,1)^2$, $\Gamma_\mathrm{D} = \partial\Omega$, und

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= \pi \begin{bmatrix} \sin(2\pi x_2)\sin^2(\pi x_1) \\ -\sin(2\pi x_1)\sin^2(\pi x_2) \end{bmatrix}, \\ p(x_1,x_2) &= \cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2). \end{aligned}$$

Implementiere die druckstabilisierte Methode der P1-P1 Diskretisierung des Stokes-Problems und bestimme mithilfe obiger Lösung die experimentelle Konvergenzrate.

Aufgabe 2

Bestimme die experimentelle Konvergenzrate der Approximierung des Stokes-Problems durch die nichtkonforme Crouzeix-Raviart Methode mithilfe des Beispiels aus Aufgabe 1.

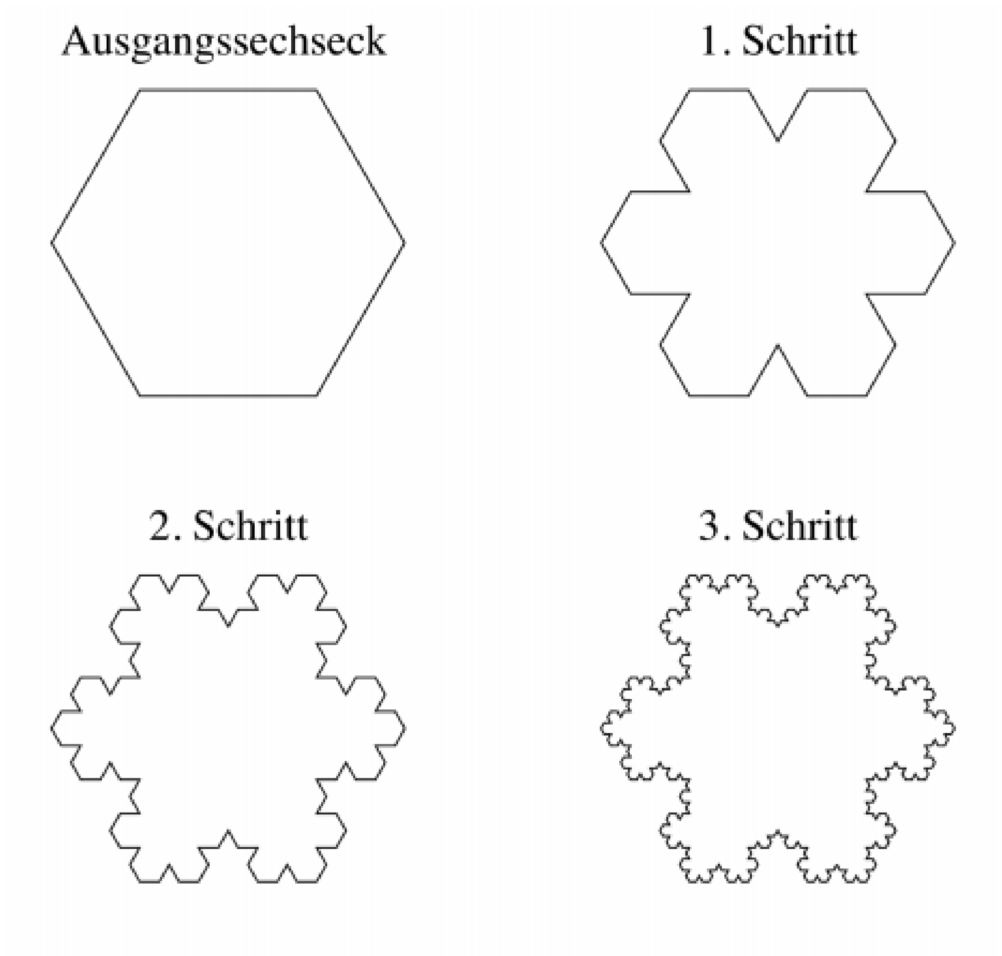
Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe)

Stabilisiere die P1-P0 Methode für die dual-gemischte Formulierung des Poisson-Problems aus Projekt 2 durch Verwendung eines geeigneten Strafterms.

Aufgabe 4 (Weihnachtsrätsel, Autor: Oleh Omelchenko (Weierstraß Institut))

[1] Um die Fläche eines sechseckigen Schmuckstuckes für den Tannenbaum vollständig zu bemalen, brauchen Elfen genau sechs Tuben mit goldener Farbe. Aber welch Schreck! Diesmal ging eine Tube verloren und die Elfen wissen nicht, was sie tun sollen. Ein Elf schlägt vor, aus dem Sechseck eine schöne Schneeflocke zu machen. Dafür macht er Folgendes: Er schneidet an jeder

Seite des Sechseckes genau in der Mitte ein kleines gleichseitiges Dreieck aus. Die Seiten der Dreiecke sind so lang wie ein Drittel einer Seite beim Ausgangssechseck. So bekommt er eine neue Figur, die auch gleichlange Seiten hat. Diese Figur ist im 1. Schritt der Abbildung zu sehen. Dann wiederholt er das Verfahren in analoger Weise und schneidet an jeder Seite der Figur noch ein kleineres Dreieck aus, welches ein Drittel der aktuellen Seitenlänge hat. Diese Figur ist im 2. Schritt der Abbildung zu sehen. Wie viele Male muss der Elf dieses Verfahren mindestens durchführen, um am Ende mit seinen verbliebenen funf Farbtuben eine Schneeflocke vollständig bemalen zu können?[2]



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

[2]Projektbezug: Wenn wir das oben beschriebene Verfahren unendlich viele Male wiederholen, bekommen wir eine seltsame Figur, die man ein Fraktal nennt. Ihre besonderen Eigenschaften sind ein hoher Grad der Selbstähnlichkeit und, was sehr erstaunlich ist, unendliche Grenzenlänge trotz einer endlichen Fläche. In der Mathematik trifft man fraktale Gebilde im Studium von dynamischen Systemen, die ein komplexes Verhalten, sogenannte seltsame Attraktoren, erzeugen. Aber Fraktale findet man auch in der Natur. Typische Beispiele aus der Biologie sind die fraktalen Strukturen bei der Züchtung des grünen Blumenkohls Romanesco und bei den Farnen. Eine große Ähnlichkeit mit Fraktalen zeigen auch Küstenlinien und die Trajektorien von der brownschen Molekularbewegung.