Abteilung für Angewandte Mathematik 15.10.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 1

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 22.10.2018 um 12:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun0`

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung her, die den Transport einer Substanz durch einen langen, dünnen Schlauch beschreibt, wobei zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ eine zusätzliche Menge der Substanz injiziert werden kann, die durch eine Funktion $f(t, x)$ beschrieben wird, welche die Anzahl der injizierten Teilchen pro Einheitsvolumen beschreibt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem in $L^2(-\pi, \pi)$ definieren, d. h., dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x)\overline{\phi_l(x)} \, \mathrm{d}x = \delta_{kl}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt.
(ii) Für $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_k(x)} \, \mathrm{d}x$. Beweisen Sie die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Da man zeigen kann, dass das obige Orthonormalsystem vollständig ist, gilt hier tatsächlich sogar Gleichheit („*Parsevalsche Gleichung*“).

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.** Sei u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t u + a(t, x)\partial_x u = 0.$$

(i) Eine Charakteristik der Gleichung ist eine Kurve $(t, \gamma(t))$, wobei γ die Lösung des Anfangswertproblems für die gewöhnliche Differentialgleichung $\gamma'(t) = a(t, \gamma(t))$ mit $\gamma(0) = x_0$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass u konstant ist entlang der Charakteristiken.
(ii) Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken der Gleichung jeweils für $a(t, x) = x$ und $a(t, x) = 2t$ und geben Sie jeweils eine Lösung zur Anfangsbedingung $u_0(x) = \cos(x)$ an.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass für den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung die Gleichung $\partial^+\partial^- = \partial^-\partial^+$ gilt.
(ii) Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen für Differenzenquotienten:

$$|\partial^{\pm} u(x_j) - u'(x_j)| \le \frac{\Delta x}{2} \|u''\|_{C([0,1])}, \text{ falls } u \in C^2([0, 1]),$$
$$|\hat{\partial} u(x_j) - u'(x_j)| \le \frac{\Delta x^2}{6} \|u'''\|_{C([0,1])}, \text{ falls } u \in C^3([0, 1]),$$
$$|\partial^+\partial^- u(x_j) - u''(x_j)| \le \frac{\Delta x^2}{12} \|u^{(4)}\|_{C([0,1])}, \text{ falls } u \in C^4([0, 1]).$$

Zeigen Sie, dass diese Abschätzungen nicht gelten, falls u die erforderlichen Differenzierbarkeitseigenschaften nicht erfüllt.