Abteilung für Angewandte Mathematik 22.10.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 2

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 29.10.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)**.** Es sei $u_0 \in C^2([0,1])$ und $\widetilde{u}_0$ bezeichne die triviale Fortsetzung von u_0 auf $\mathbb{R}$ durch 0.
(i) Der *Träger* $\operatorname{supp}(u_0) = \overline{\{x \in [0,1] : u_0(x) \neq 0\}}$ ist die abgeschlossene Hülle der „Nichtnullstellenmenge" von u_0. Zeigen Sie, dass $\widetilde{u}_0 \in C^2(\mathbb{R})$, falls $\operatorname{supp}(u_0) \subset (0,1)$.
(ii) Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die Lösung des Transportproblems $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ mit $a > 0$, $u(t,0) = 0$ und $u(0,x) = u_0(x)$ gilt, dass $u \in C^2([0,T] \times [0,1])$ und dass

$$\|\partial_x^2 u(t,\cdot)\|_{C([0,1])} = a^{-2}\|\partial_t^2 u(t,\cdot)\|_{C([0,1])} \leq \|u_0''\|_{C([0,1])}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $g \in C([-\pi,\pi])$, sodass die Ungleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} |fg| \,\mathrm{d}x \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f| \,\mathrm{d}x$$

für alle $f \in L^1(-\pi,\pi)$ gilt. Zeigen Sie, dass daraus $|g(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$ folgt. Gilt diese Implikation ebenfalls, wenn die Funktion g nur stückweise stetig in $[-\pi,\pi]$ ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie das numerische Verfahren $\partial_t^+ U_j^k + a\partial_x^+ U_j^k = 0$ zur Lösung der Transportgleichung $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $a < 0$. Zeigen Sie, dass das Verfahren unter angemessenen Bedingungen an Δt und Δx stabil ist und beweisen Sie eine Fehlerabschätzung.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter Anfangsdaten, dass das Finite-Differenzen-Verfahren $U_j^{k+1} = U_j^k - \mu(U_j^k - U_{j-1}^k)$ mit $\mu = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ instabil ist, falls $\mu > 1$ gilt.
(ii) Überprüfen Sie die Gültigkeit der CFL-Bedingung sowie der Abschätzung

$$\sup_{j=0,\dots,J} |U_j^{k+1}| \leq \sup_{j=0,\dots,J} |U_j^k|$$

für die folgenden Verfahren für die Transportgleichung:

$$\partial_t^+ U_j^k - \partial_x^- U_j^k = 0, \quad \partial_t^+ U_j^k + \partial_x^+ U_j^k = 0, \quad \partial_t^+ U_j^k + \widehat{\partial}_x U_j^k = 0.$$