

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 3

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 05.11.2018 um 12:00 Uhr

**Aufgabe 1** (5 Punkte). Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Stabilitätsanalyse, dass das Finite-Differenzen-Verfahren zur Approximation der Transportgleichung  $\partial_t u + a \partial_x u = 0$  mit  $a \neq 0$  bei Verwendung des Vorwärts-Differenzenquotienten in der Zeit und des zentralen Differenzenquotienten im Ort in jedem Fall (unabhängig von den gewählten Gitterweiten) instabil ist.

**Aufgabe 2** (3+2 Punkte). Um Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu gegebenen Anfangs- und Randwerten zu konstruieren, eignet sich die Methode der *Trennung der Veränderlichen*: Zuerst konstruiert man eine Folge von Funktionen  $u_n(t, x) = v_n(t)w_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , welche die Wärmeleitungsgleichung unter den vorgeschriebenen Randbedingungen lösen. Die zugehörige Lösung des Anfangsrandwertproblems erhält man dann durch Bestimmung von Koeffizienten  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n(t) w_n(x)$$

in geeigneter Weise konvergiert und der Anfangsbedingung  $u(0, x) = u_0(x)$  genügt.

(i) Konstruieren Sie Paare  $(v_n, w_n)$ , sodass  $u_n(t, x) = v_n(t)w_n(x)$  die Gleichung  $\partial_t u_n - \partial_x^2 u_n = 0$  in  $(0, T) \times (0, 1)$  sowie die Randbedingung  $u_n(t, 0) = u_n(t, 1) = 0$  für alle  $t \in (0, T)$  erfüllt.

(ii) Verwenden Sie die Folge aus (i) um, wie oben beschrieben, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit dem Anfangswert

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(n\pi x)$$

zu konstruieren.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass sich jede Funktion  $u_0 \in C([0, 1], \mathbb{R})$  in dieser Form darstellen lässt.

**Aufgabe 3** (5 Punkte). Sei  $u \in C^2([0, T] \times [0, 1])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_x u(t, x))^2 dx \right) \leq 0$$

für alle  $t \in [0, T]$  gilt und folgern Sie die Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit nicht-homogenen Dirichlet-Randbedingungen.

**Aufgabe 4** (5 Punkte). Sei  $u \in C^2([0, T] \times [\alpha, \beta])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$ . Zeigen Sie, dass für passend gewählte Zahlen  $\tau, L, x_0 > 0$  die Funktion  $\tilde{u}(s, y) = u(\tau s, Ly + x_0)$  eine Lösung von  $\partial_s \tilde{u} - \partial_y^2 \tilde{u} = 0$  in  $(0, T') \times (0, 1)$  ist.