Abteilung für Angewandte Mathematik 05.11.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 4

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 12.11.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter Anfangsdaten, dass das explizite Euler-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung instabil ist, falls $\Delta t > \Delta x^2/2$.
(ii) Zeigen Sie, dass die numerischen Lösungen aus dem Crank-Nicolson-Verfahren im Allgemeinen kein diskretes Maximumprinzip erfüllen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Weisen Sie nach, dass die Eigenwerte der Tridiagonalmatrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

durch $\lambda_p = a + 2b\cos(p\pi/(n+1))$ für $p = 1, 2, \dots, n$ gegeben sind.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** Es sei $J \in \mathbb{N}$ und $\Delta x = 1/J$.
(i) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\varphi_p \in \mathbb{R}^{J+1}$, $p = 1, 2, \dots, J-1$, mit $\varphi_{p,j} = \sqrt{2}\sin(\pi p j \Delta x)$ für $j = 0, 1, \dots, J$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\ell^2_{0,\Delta x} = \{V \in \mathbb{R}^{J+1} : V_0 = V_{J+1} = 0\}$ bezüglich des Skalarprodukts

$$(V, W)_{\Delta x} = \Delta x \sum_{j=0}^{J} V_j W_j$$

bilden.
(ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren φ_p Eigenvektoren des Operators $-\partial_x^+\partial_x^- : \mathbb{R}^{J+1} \to \mathbb{R}^{J+1}$ sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an. Dabei ist

$$\big(-\partial_x^+\partial_x^- V\big)_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \in \{0, J\}, \\ -\partial_x^+\partial_x^- V_j, & \text{falls } j \in \{1, 2, \dots, J-1\}. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\sin(y) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Ortsdiskretisierung der Wärmeleitungsgleichung mit dem zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung auf ein Anfangswertproblem der Form $\partial_t U + AU = 0$, $U(0) = U_0$, führt, welches für jedes $T > 0$ eine eindeutige Lösung im Zeitinterval $[0, T]$ besitzt.