Abteilung für Angewandte Mathematik 12.11.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 5

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 19.11.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Weisen Sie formal nach, dass die Funktion

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/(4t)} u_0(y) \, \mathrm{d}y$$

für jedes $T > 0$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)**.** Sei $u \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$ Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ mit Anfangswerten $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}(\xi,\eta) = u(t,x)$ mit den neu eingeführen Variablen $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ die Gleichung $\partial_\xi \partial_\eta \widetilde{u} = 0$ erfüllt.
(ii) Folgern Sie, dass $\widetilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ und schließen Sie daraus, dass es stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ gibt, sodass $u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$. Geben Sie Funktionsterme für f und g in Abhängigkeit von u_0 und v_0 an.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie das Prinzip der Energieerhaltung für die Wellengleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen und folgern Sie die Eindeutigkeit von Lösungen für allgemeine Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Für $J \in \mathbb{N}$ sei $\Delta x = 1/J$ und $V, W \in \mathbb{R}^{J+1}$.
(i) Beweisen Sie die diskrete Produktregel

$$\partial_x^-(W_j V_j) = W_j(\partial_x^- V_j) + (\partial_x^+ W_{j-1}) V_{j-1}.$$

(ii) Folgern Sie daraus die Formel für die partielle Summation,

$$\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} (\partial_x^+ W_j) V_j = -\Delta x \sum_{j=1}^{J} W_j(\partial_x^- V_j) + W_J V_J - W_0 V_0,$$

und erläutern Sie den Zusammenhang zur Formel für die partielle Integration von Funktionen.