Abteilung für Angewandte Mathematik 19.11.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 6

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 26.11.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x/|x|$.
(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $D_f(x)$.
(ii) Geben Sie für $n = 2$ die Funktion in Polarkoordinaten an und berechnen Sie für $R > 0$ und

$$K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, x_2 \text{ und } |x| < R\}$$

den Wert des koordinatenweise definierten Integrals $\int_K f \,\mathrm{d}x$ sowie den Wert von $\int_K \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass das implizite Differenzenverfahren für die Wellengleichung mit homogenen Dirichlet-Randwerten wohldefiniert ist, d. h., dass die entstehenden linearen Gleichungssysteme regulär sind.
(ii) Zeigen Sie, dass der Konsistenzfehler des impliziten Differenzenverfahrens für die Wellengleichung von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Zu einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne ν die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ die Gültigkeit der Identitäten

$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}s = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + v \Delta u\right) \mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega \left(u \Delta v - v \Delta u\right) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u \nabla v \cdot \nu - v \nabla u \cdot \nu\right) \mathrm{d}s.$$

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ für $n \in \{2, 3\}$, $a > 0$, und $u \in C^1(\overline{B_a(x_0)})$.
(i) Zeigen Sie, dass für die äußere Einheitsnormale ν in Polar- bzw. Kugelkoordinaten bezüglich x_0 die Gleichung

$$\nabla u \cdot \nu = \partial_r u$$

auf $\partial B_{a'}(x_0)$ für alle $0 < a' \leq a$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(s) \,\mathrm{d}s = u(x_0),$$

wobei $|\partial B_r(x_0)|$ das Oberflächenmaß von $\partial B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet.