Abteilung für Angewandte Mathematik 26.11.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 7

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 03.12.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, die für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ der Rekursion

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_{k-1} \\ \xi_k \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

genügen.
(i) Zeigen Sie, dass die Folge ξ_k beschränkt ist, falls die komplexen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A betragsmäßig strikt kleiner als 1 sind.
(ii) Zeigen Sie, dass es eine unbeschränkte Folge gibt, die die Rekursionsvorschrift erfüllt, falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ mit $|\lambda| = 1$ gilt. (Tipp: Betrachten Sie die Folge $(y_k)_k$ mit $y_k = k\lambda^k$.)

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** (i) Beweisen Sie den Gaußschen Integralsatz für rechteckige Gebiete $(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ mithilfe des Satzes von Fubini für Mehrfachintegrale.
(ii) Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\underline{u} = \inf_{x\in\Omega} u(x)$ sowie $\overline{u} = \sup_{x\in\Omega} u(x)$. Zeigen Sie, dass für das Integralmittel von u die Inklusion

$$\fint_\Omega u \,\mathrm{d}x \in [\underline{u}, \overline{u}]$$

gilt. Zeigen Sie außerdem, dass die Funktion u bereits konstant sein muss, wenn der Wert des Integralmittels gerade $\underline{u}$ oder $\overline{u}$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega = (0, 1)^2$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ gegeben als

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \alpha_{m,n} \sin(m\pi x_1) \sin(n\pi x_2).$$

Berechnen Sie $-\Delta u_{m,n}$ für $u_{m,n}(x_1, x_2) = \sin(\pi m x_1) \sin(\pi n x_2)$ und konstruieren Sie daraus Lösungen des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d. h., für jedes $z \in U$ existiere $f'(z) \in \mathbb{C}$, sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z),$$

wobei $h \to 0$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen darstellt, welche gegen 0 konvergiert. Die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Zeigen Sie, dass für die partiellen Ableitungen die Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

in U gelten und dass u und v harmonisch in U sind, d. h., dass $-\Delta u = 0$ und $-\Delta v = 0$ in U gilt.