Abteilung für Angewandte Mathematik 03.12.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 8

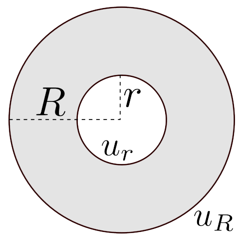
Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 10.12.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega)$ sei $\widetilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$.
(i) Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Darstellung

$$\Delta u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \partial_r^2 \widetilde{u}(r,\phi) + r^{-1}\partial_r \widetilde{u}(r,\phi) + r^{-2}\partial_\phi^2 \widetilde{u}(r,\phi).$$

gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}(r,\phi) = r^{2/3}\sin(\frac{2}{3}\phi)$ harmonisch ist. Handelt es sich dabei um eine klassische Lösung der Poissongleichung auf $\Omega = \{r(\cos\phi, \sin\phi) : 0 \le r \le 1, 0 \le \phi \le \frac{3}{2}\pi\}$? Begründen Sie!

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)**.** Wir betrachten die stationäre Verteilung der Wassertemperatur u in einem ringförmigen Schwimmbecken mit Innendurchmesser $r > 0$ und Außendurchmesser $R > r$ (vgl. Skizze) unter der Annahme, dass die Temperatur nicht von der Wassertiefe abhängt. Durch ein Heizsystem seien dabei die Temperaturen u_r am inneren und u_R am äußeren Rand gegeben.



(i) Formulieren Sie ein zweidimensionales Randwertproblem, durch das die Temperaturverteilung u bestimmt ist.
(ii) Zeigen Sie, dass

$$\Delta(g \circ \rho) = g''(\rho) + \rho^{-1}g'(\rho) = \rho^{-1}(\rho g'(\rho))'$$

für $g \in C^2(\mathbb{R}_{\ge 0})$ und $\rho(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ gilt und rechfertigen Sie die Annahme $u = \widetilde{u} \circ \rho$ für die Lösung u des Problems aus (i).
(iii) Lösen Sie das Problem für ein Schwimmbecken mit $r = 4$, $R = 8$, $u_r = 30$ und $u_R = 20$. Auf welcher Kreisbahn sollten Sie schwimmen, wenn Ihre bevorzugte Badewassertemperatur 25°C beträgt?

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
(i) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $Ax = b$ genau dann löst, wenn

$$(Ax)^\top y = b^\top y$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt.
(ii) Nehmen Sie an, dass A symmetrisch und positiv definit ist. Zeigen Sie, dass dann eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass x genau dann Minimierer der Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2}|Bz|^2 - b^\top z$$

ist, wenn x das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei H ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $V \subset H$ ein linearer Teilraum. Sei ferner $u \in H$ und $\widetilde{u} \in V$. Zeigen Sie, dass $\|u - \widetilde{u}\| \le \|u - v\|$ für alle $v \in V$ genau dann gilt, wenn $\langle u - \widetilde{u}, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$.