Abteilung für Angewandte Mathematik 10.12.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 9

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 17.12.2018 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

glatt ist, d. h., dass $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt.
(ii) Sei $u \in C(\Omega)$ und es gelte $\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $v \in C^\infty(\Omega)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass dann $u = 0$ in Ω gilt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** Seien x, y, x', y' beliebige Elemente eines Prähilbertraums $(V, \|\cdot\|)$.
(i) Beweisen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(ii) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\Big| \|x - x'\| - \|y - y'\| \Big| \leq \|x - y\| + \|x' - y'\|.$$

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Interval und $V = C^1(I)$.
(i) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{V,\infty})$ mit

$$\|v\|_{V,\infty} = \sup_{x\in I} |v(x)| + \sup_{x \in I} |v'(x)|$$

ein Banachraum ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{V,1})$ mit

$$\|v\|_{V,1} = \int_I |v(x)| + |v'(x)| \,\mathrm{d}x$$

kein Banachraum ist.

Aufgabe 4 (3+1+1 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass ein linearer Operator $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen genau dann stetig ist, wenn er beschränkt ist in dem Sinn, dass eine Schranke $c > 0$ existiert, sodass

$$\|Av\|_W \leq c\|v\|_V$$

für alle $v \in V$ gilt.
(ii) Sei $A : V \to W$ linear und $\|A\|_{\mathrm{L}(V,W)} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|_W$. Zeigen Sie, dass $\|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}$ die kleinste Schranke für den Operator A ist, und dass der Operator genau dann beschränkt ist, wenn $\|A\|_{\mathrm{L}(V,W)} < \infty$.
(iii) Zeigen Sie, dass durch $A \mapsto \|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}$ eine Norm auf dem Raum $\mathrm{L}(V, W)$ der linearen und beschränkten Operatoren von V nach W gegeben ist.