Abteilung für Angewandte Mathematik 17.12.2018

Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 10

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 07.01.2019 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)**.** Sei $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$.
(i) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(ii) Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ die höldersche Ungleichung

$$\int_\Omega |uv| \,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jede stetige, stückweise differenzierbare Funktion $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ schwach differenzierbar ist. Skizzieren Sie die schwache Ableitung der Funktion

$$u(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in [-2, 0), \\ x^{1/2}, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 3x - 2, & \text{falls } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Quiz (10 Punkte)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Sie sollten Ihre Entscheidung im Tutorat begründen können.

Für eine C^2 Funktion approximiert der zentrale Differenzenquotient $\widehat{\partial}$ die Ableitung besser als die einseitigen Differenzenquotienten $\partial^\pm$.	
In der Implementierung des Verfahrens $\partial_t^+ U_j^k + a \partial_x^- U_j^k = 0$ muss man in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.	
Die CFL-Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Stabilität eines Finite-Differenzen-Verfahrens.	
Das θ-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung ist explizit für $\theta < \frac{1}{2}$ und implizit für $\theta \geq \frac{1}{2}$.	
Das implizite Verfahren für die Wellengleichung erfüllt ein diskretes Maximumprinzip.	
Wenn $f = 0$ ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ konstant.	
Für $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Gamma_\mathrm{D} = \partial\Omega$ und $u_D = 0$ besitzt das Poisson-Problem eine klassische Lösung.	
Jeder endlich-dimensionale Teilraum eines beliebigen Banachraums ist abgeschlossen.	
Lineare Operatoren zwischen endlich-dimensionalen Räumen sind immer stetig.	
Die Funktion $\phi\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{sign}(x)$ ist schwach differenzierbar.	

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!