Abteilung für Angewandte Mathematik 07.01.2019
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 11

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 14.01.2019 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und $\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega$ nicht leer. Zeigen Sie, dass

$$\|v\| = \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}$$

eine Norm auf $V = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = 0\}$ definiert und folgern Sie, dass die schwache Formulierung der Poisson-Gleichung höchstens eine Lösung haben kann.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** Beweisen Sie die Produkt- und Kettenregel für schwache Ableitungen:
(i) Falls $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, dann ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.
(ii) Falls $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|g'| < C$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, dann ist $\widetilde{u} = g \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla\widetilde{u} = g'(u)\nabla u$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrisch und bilinear. Beweisen Sie die Gültigkeit der Abschätzung

$$a(v, w) \le \big(a(v, v)\big)^{1/2} \big(a(w, w)\big)^{1/2}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Für $j \in \mathbb{N}$ sei $v_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $v_{j,n} = \delta_{j,n}$, d. h.

$$v_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

wobei die 1 an der j-ten Stelle steht. Zeigen Sie, dass die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist und bestimmen Sie den schwachen Grenzwert.