Abteilung für Angewandte Mathematik 14.01.2019
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 12

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 21.01.2019 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei V ein Hilbertraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzive Bilinearform, welche zusätzlich symmetrisch ist, und sei $b\colon V \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional. Sei ferner $V_h \subset V$ ein endlich-dimensionaler Teilraum und $u_h \in V_h$ die eindeutige Galerkin-Approximation von $u \in V$ mit $a(u,v) = b(v)$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Quasi-Bestapproximations-Eigenschaft im Céa-Lemma mit der Konstanten $(k_a/\alpha)^{\frac{1}{2}}$ gilt, also dass

$$\|u - u_h\|_V \leq (k_a/\alpha)^{\frac{1}{2}} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V.$$

Dabei sind k_a und α die Beschränktheits- und Koerzivitätskonstante der Bilinearform a.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)**.** Sei $\Omega = \{r(\cos\varphi, \sin\varphi) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$, $\Gamma_\mathrm{D} = \partial\Omega$ und

$$u_D = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi \in \{0, 3\pi/2\}, \\ \sin(2\varphi/3), & \text{falls } r = 1. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass für $f = 0$ durch

$$u(r,\varphi) = r^{(2/3)} \sin(2\varphi/3)$$

eine schwache Lösung des Poisson-Problems auf Ω gegeben ist.
(ii) Zeigen Sie anhand des Beispiels aus (i), dass das Poisson-Problem im Allgemeinen nicht H^2-regulär ist, wenn das Lösungsgebiet nicht konvex ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Knotenpunkten $\mathcal{N}_h$. Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathcal{N}_h$ eine eindeutige Funktion $\varphi_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ mit $\varphi_z(y) = \delta_{zy}$ für alle $y \in \mathcal{N}_h$ gibt und dass die Familien $(\varphi_z)_{z\in\mathcal{N}_h}$, $(\varphi_z)_{z\in\mathcal{N}_h\setminus\Gamma_\mathrm{D}}$ Basen der Räume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ bzw. $\mathcal{S}^1_\mathrm{D}(\mathcal{T}_h)$ bilden.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $T = \mathrm{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_d\}$ ein Simplex mit positiv orientierten Ecken $z_0, z_1, \dots, z_d \in \mathbb{R}^d$ und sei

$$X_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

Beweisen Sie, dass das Volumen von T durch $|T| = (1/d!) \det X_T$ gegeben ist und dass die Gradienten der nodalen Basisfunktionen auf T die Gleichung

$$[\nabla\varphi_{z_0}|_T, \dots, \nabla\varphi_{z_d}|_T]^\top = X_T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_d \end{bmatrix}$$

erfüllen.
Hinweis: Verwenden Sie die cramersche Regel und die Tatsache, dass die nodale Basisfunktion zum Knoten z_j für $x \in T$ durch

$$\phi_{z_j}(x) = \frac{1}{d!|T|} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & z_{j+1} & \dots & z_{j+d} \end{bmatrix}$$

gegeben ist, wobei die Indizes modulo d zu verstehen sind.