**Abteilung für Angewandte Mathematik** 15.10.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

# Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 1

Abgabe: Per E-Mail bis Donnerstag, den 29.10.2018 um 12:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun0`

**Projekt 1** (3+3+2+2 Punkte)**.** (i) Implementieren Sie ein numerisches Verfahren zur Lösung der Transportgleichung $\partial_t u + \partial_x u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ für $T = 1$ mit der Randbedingung $u(t,0) = 0$ am Einflussrand und dem Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0, \text{ sonst}, \end{cases}$$

indem Sie die Zeitableitung mittels des Vorwärts- und die räumliche Ableitung mittels des Rückwärtsdifferenzenquotienten approximieren. Wählen Sie für $(\Delta t, \Delta x)$ nacheinander die Werte $\frac{1}{80}(2,2)$, $\frac{1}{80}(2,1)$ und $\frac{1}{80}(1,2)$. Überprüfen Sie jeweils, ob die CFL-Bedingung erfüllt ist und vergleichen Sie Ihre numerischen Lösungen mit der exakten Lösung der Transportgleichung.
(ii) Modifizieren Sie Ihren Code aus (i), um ein numerisches Verfahren für die Gleichung

$$\partial_t u + a(x)\partial_x u = 0$$

zu erhalten, wobei $a\colon (0,1) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine gegebene Funktion ist. Wie sollte die CFL-Bedingung für nicht-konstante Funktionen $a$ lauten? Testen Sie Ihren Code mit $a(x) = (1 + 4x^2)^{1/2}$ und den Anfangswerten $u_0(x) = 1$ für $0.05 \leq x \leq 0.25$ und $u_0(x) = 0$ sonst.
(iii) Berechnen Sie mit Ihrem Programm eine Lösung zu $a(x) = -1$ mit dem Anfangswert $u_0$ wie in (i). Gibt es ein Paar von Diskretisierungsparametern $(\Delta t,\ \Delta x)$, sodass die CFL-Bedingung erfüllt ist?
(iv) Modifizieren Sie Ihren Code nochmals, sodass nun auch die räumliche Ableitung durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten approximiert wird. Die Randbedingung sei nun durch $u(t,1) = 0$ für $t \geq 0$ gegeben. Leiten Sie eine CFL-Bedingung für dieses Näherungsverfahren her und probieren Sie verschiedene Werte für $\Delta t$ und $\Delta x$ aus.

**Projekt 2** (10 Punkte)**.** Das *Upwind-Verfahren* für die Transportgleichung ist definiert durch

$$U_j^{k+1} = \begin{cases} (1 - \mu a_j^k)U_j^k + \mu a_j^k U_{j-1}^k, & \text{falls } a_j^k \geq 0, \\ (1 + \mu a_j^k)U_j^k - \mu a_j^k U_{j+1}^k, & \text{falls } a_j^k < 0, \end{cases}$$

wobei $\mu = \Delta t / \Delta x$ und $a_j^k = a(t_k, x_j)$. Implementieren Sie dieses Verfahren und testen Sie es mit der Funktion $a(x) = \sin(x)$ und den Randwerten $u(t,0) = u(t,1) = 0$ jeweils mit verschiedenen Anfangswerten $u_0$, Gitterweiten $\Delta x$ und Zeitschrittweiten $\Delta t$. Diskutieren Sie Ihre Resultate sowie die Gültigkeit einer CFL-Bedingung.