Abteilung für Angewandte Mathematik 12.11.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 3

Abgabe: Per E-Mail bis Montag, den 26.11.2018 um 12:00 Uhr

Projekt 1 (10 Punkte)**.** Implementieren Sie das bedingungslos stabile Schema

$$\partial_t^+ \partial_t^- U_j^n = \frac{1}{4} \partial_x^+ \partial_x^- (U_j^{n+1} + 2U_j^n + U_j^{n-1})$$

zur numerischen Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0, T) \times (0, 1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0, x) = v_0(x)$ für $x \in (0, 1)$ zu gegebenen Funktionen $u_0, v_0 \in C([0, 1])$. Verwenden Sie dabei eine Diskretisierung des Anfangswertes $\partial_t u(0, x)$ mittels des zentralen Differenzenquotienten und Geisterpunkten zur Zeit $-\Delta t$, sodass Sie quadratische Konvergenz erwarten können. Testen Sie Ihr Programm mit der exakten Lösung $u(t, x) = \cos(\pi t) \sin(\pi x)$. Erstellen Sie Plots, welche die quadratische Konvergenz in Abhängigkeit der Diskretisierungsparameter veranschaulichen.

Projekt 2 (10 Punkte)**.** Der Klang eines Saiteninstruments ist charakterisiert durch das auftreten verschiedener Obertöne. Um experimentell zu überprüfen, dass die Wellengleichung Effekte dieser Art beschreibt, betrachten wir eine Saite der Länge $\ell > 0$, die zur Zeit $t = 0$ an einer Stelle $x_p \in (0, \ell)$ gezupft und dadurch um eine Distanz $H > 0$ aus ihrer Ausgangsposition ausgelenkt wird. Der Zustand der Saite wird also beschrieben durch

$$u_0(x) = \begin{cases} Hx/x_p & \text{für } x \le x_p, \\ H(\ell - x)/(\ell - x_p) & \text{für } x > x_p. \end{cases}$$

Wir gehen davon aus, dass der Ton an einer Stelle $x_s \in (0, \ell)$ aufgegriffen wird, etwa durch das Schallloch im Resonanzkörper einer akustischen Gitarre oder einen elektromagnetischen Tonabnehmer im Fall einer E-Gitarre. Unter der Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeit der Saite gleich 0 ist, ergibt sich mittels Trennung der Veränderlichen in der Wellengleichung die exakte Lösung

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos(\omega_m t) \sin(m\pi x)$$

mit $\omega_m = m\pi c$ und $c = (\sigma/\varrho)^{1/2}$, wobei ϱ die Dichte und σ die Spannung der Saite beschreibt. Bestimmen Sie mit Ihrem Programm aus Projekt 1 die numerische Lösung der Wellengleichung mit $c = 2$, $T = 2$, $x_p = 1/8$ und $H = 1/100$. Nutzen Sie Ihre Approximationen, um mit Hilfe der MATLAB-Funktion `dct` für die diskrete Cosinus-Transformation Koeffizienten α_m, $m = 1, 2, \ldots, K$, zu bestimmen, sodass

$$U_{j_s}^k = \sum_{m=1}^{K} \alpha_m \cos(\omega_m t_k),$$

wobei j_s der entsprechende Index zum Gitterpunkt $x_s = 1/4$ ist. Erstellen Sie Plots der Schwingungen $w_m(t) = \alpha_m \cos(\omega_m t)$, $m = 1, 2, \ldots, 6$, als Funktionen von $t \in [0, T]$. Veranschaulichen Sie die dominierenden Obertöne, indem Sie die Verteilung der Amplituden in Form der Funktion $m \mapsto |\alpha_m|$ graphisch darstellen. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten für andere Werte von x_p und x_s.