Abteilung für Angewandte Mathematik 26.11.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 4

Abgabe: Per E-Mail bis Montag, den 10.12.2018 um 12:00 Uhr

Projekt 1 (5 Punkte)**.** Verifizieren Sie die unbedingte Stabilität des Differenzenverfahrens

$$\partial_t^+ \partial_t^- U_j^n = \frac{1}{4} \partial_x^+ \partial_x^- (U_j^{n+1} + 2U_j^n + U_j^{n-1})$$

zur Lösung der Wellengleichung aus Projekt 1 vom letzten Übungsblatt, indem Sie experimentell überprüfen, dass die diskrete Energie

$$E^k = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J-1} |\partial_t^+ U_j^k|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J} |\partial_x^- U_j^{k+\frac{1}{2}}|^2$$

unabhängig vom Zeitschritt k ist. Hierbei ist $U_j^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^{k+1} + U_j^k)$

Projekt 2 (10 Punkte)**.** Definieren Sie Funktionen f, g und u_D, sodass $u(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_{\mathrm{D}} = \{0\} \times [0,1], \\ \partial_n u &= g && \text{auf } \Gamma_{\mathrm{N}} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{D}} \end{aligned}$$

ist. Lösen Sie das Problem numerisch mit einem Finite-Differenzen-Verfahren. Realisieren Sie die Neumann-Randbedingungen, indem Sie geeignete Geisterpunkte einführen und die Ableitungen in Normalenrichtung auf Γ_{N} mit zentralen Differenzenquotienten approximieren. Vergleichen Sie Ihre numerischen Lösungen mit der exakten Lösung u und verifizieren Sie so die quadratische Konvergenz des Verfahrens.

Projekt 3 (5 Punkte)**.** Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega = B_1(0), \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei die Diskretisierung $r_i = (i - \frac{1}{2})\Delta r$, $i = 1, \ldots, J+1$, $\vartheta_m = (m-1)\Delta\vartheta$, $m = 1, \ldots, K+1$, der Kreisscheibe in Polarkoordinaten für $\Delta r = \frac{2}{2J+1}$, $\Delta\vartheta = \frac{2\pi}{K}$. Drücken Sie den Laplace-Operator in Polarkoodinaten aus und diskretisieren Sie die vorkommenden Ableitungen erster Ordnung mit dem zentralen Differenzenquotienten.