Abteilung für Angewandte Mathematik 10.12.2018
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 5

Abgabe: Per E-Mail bis Montag, den 07.01.2019 um 12:00 Uhr

Projekt 1 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie Näherungslösungen $u_m \in \mathcal{P}_m([0,1])$ des eindimensionalen Poisson-Problems $-u'' = f$ in $\Omega = (0,1)$ mit Randbedingungen $u(0) = u(1) = 1$, indem Sie das Gleichungssystem

$$-u_m''(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \dots, m-1, \quad u_m(x_0) = u_m(x_m) = 1,$$

mit $x_i = i/m$ für $i = 0, 1, \dots, m$ numerisch Lösen. Testen Sie das Verfahren für $f(x) = 1$ und $f(x) = \operatorname{sign}(x - 1/2)$. Untersuchen Sie das Verhalten des Fehlers $\max_{i=0,\dots,m} |u(x_i) - u_m(x_i)|$ sowie die Kondition des Gleichungssystems für $m \to \infty$.

Projekt 2 (15 Punkte)**.** In der Adventszeit backen der Weihnachtsmann und seine Wichtel traditionell zusammen Plätzchen. Der Innenraum ihres Backofens ist durch das Gebiet $\Omega = (0, 0.4) \times (0, 0.3) \times (0, 0.4)$ gegeben. Die Temperaturverteilung im Backofen bezeichnen wir mit θ. An der Rückseite $y = 0$ des Ofens beträgt die Temperatur konstant 200°C. An der Vorderseite $y = 0.3$ des Ofens befindet sich die Klappe. Ist diese geöffnet, so entspricht die Temperatur dort genau der Außentemperatur am Nordpol (−15°C). Ist sie geschlossen, so ist der Backofen dort, genauso wie an den anderen beiden Seiten $x = 0$ und $x = 0.4$, perfekt isoliert, d. h. es gilt $\partial_n \theta = 0$. Außerdem ist der Ofen gut vorgeheizt: zur Zeit $t = 0$ beträgt die Temperatur überall 200°C. Da der Weihnachtsmann und die Wichtel beim Plätzchenbacken immer viel Glühwein trinken, kommt es hin und wieder zu Streitereien. Oberwichtel Anton diskutiert schon seit einer halben Stunde mit dem Weihnachtsmann und sie können sich nicht einigen, welche der folgenden Vorgehensweisen sinnvoller ist, wenn man möglichst wenig Energie verbrauchen möchte:
(i) Der Ofen ist 30 Sekunden geöffnet, dann 30 Sekunden geschlossen und anschließend nochmal 30 Sekunden geöffnet;
(ii) Der Ofen ist erst 30 Sekunden geschlossen und anschließend 60 Sekunden am Stück geöffnet.
Der Weihnachtsmann weiß, dass man ein mathematisches Modell erhält, indem man ausnutzt, dass die Wärmedichte w proportional zur Temperaturdichte θ ist, d. h. $w = \rho c_p \theta$, und der Wärmefluss proportional zum Temperaturgradienten ist, d. h. $q = -\kappa \nabla \theta$, und die thermische Energie insgesamt erhalten bleibt, d. h. $\partial_t w + \operatorname{div} q = 0$. Oberwichtel Anton weiß sogar, dass vernünftige Parameter für das Modell ungefähr durch die entsprechenden Konstanten für Luft gegeben sind, nämlich die Dichte $\rho = 1.2041\,\mathrm{kg/m^3}$, der Wärmeleitkoeffizient $\kappa = 0.0262\,\mathrm{W/(m\,K)}$ und die spezifische Wärmekapazität $c_p = 1.005 \times 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Zusammen erschließen sie sich noch, dass man eine Dimensionsreduktion durchführen kann, indem man θ durch den Mittelwert

$$\widetilde{\theta}(t, x, y) = 0.4^{-1} \int_0^{0.4} \theta(t, x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

ersetzt. Allerdings ist keiner der beiden mehr in Lage, mit Hilfe dieser Informationen die Streitfrage zu beantworten.
Formulieren Sie ein Anfangsrandwertproblem zur Beschreibung der gemittelten Temperaturverteilung $\widetilde{\theta}$ in $\widetilde{\Omega} = (0, 0.4) \times (0, 0.3)$. Implementieren Sie ein Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung des Problems und simulieren Sie damit die Szenarien (i) und (ii). Entscheiden Sie anhand Ihrer Simulation, ob es energietechnisch sinnvoller ist, den Ofen einmal für einen längeren Zeitraum oder zweimal für einen kürzeren Zeitraum zu öffnen. Erläutern Sie die Schwächen des Modells und des numerischen Verfahrens.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!