Abteilung für Angewandte Mathematik 07.01.2019
Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. C. Palus

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019 – Blatt 6

Abgabe: Per E-Mail bis Montag, den 21.01.2019 um 12:00 Uhr

Projekt 1 (5 Punkte)**.** Für $\varepsilon > 0$ seien die Dreiecke $T = \operatorname{conv}\{(-1,0),(1,0),(0,\varepsilon)\}$ und $T^\pm = \operatorname{conv}\{(\pm 1,0),(0,0),(0,\varepsilon)\}$, sowie die Triangulierungen $\mathcal{T}_h^1 = \{T\}$ und $\mathcal{T}_h^2 = \{T^+, T^-\}$ des Gebietes $\Omega_\varepsilon = T$ gegeben. Berechnen Sie jeweils den Interpolationsfehler

$$\|\nabla(u - \mathcal{I}_h u)\|_{L^2(\Omega)}$$

für die Funktion $u(x,y) = 1 - x^2$ für $\varepsilon = 10^{-j}$, $j = 1,2,\dots,5$, und diskutieren Sie die Relevanz einer Winkelbedingung für Folgen von Triangulierungen.

Projekt 2 (10 + 5 Punkte)**.** (i) Modifizieren Sie das MATLAB-Programm mit dem $P1$-Finite-Elemente-Verfahren für das Poisson-Problem, sodass das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(K\nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = u_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}}, \quad (K\nabla u)\cdot n = g \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}},$$

gelöst wird. Dabei sei $K : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine stückweise stetige Abbildung, sodass $K(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit ist. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0,1)\times(0,2)$, $\Gamma_{\mathrm{N}} = \{1\}\times(0,2)$, $\Gamma_{\mathrm{D}} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{N}}$, $u(x,y) = x^2 y$ und

$$K(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & \sin(x) \\ \sin(x) & 2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Modifizieren Sie das $P1$-Finite-Elemente-Verfahren für das Poisson-Problem erneut, sodass nun das Robin-Randwertproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u + \alpha\partial_n u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

gelöst wird. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0,1)^2$, $\alpha = 2$, und $u(x,y) = x^2 + y^2$.