Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Montag, den 22. Oktober 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Sei $a : H^1_{\mathrm{D}}(\Omega) \times H^1_{\mathrm{D}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine symmetrische und koerzive Bilinearform und sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von Ω. Sei $A = (A_{zy})_{z,y \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma_{\mathrm{D}}}$ für $z, y \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma_{\mathrm{D}}$ definiert durch

$$A_{zy} = a(\varphi_z, \varphi_y).$$

(i) Zeigen Sie, dass A positiv definit und symmetrisch ist.
(ii) Zeigen Sie für die durch das Poissonproblem induzierte Bilinearform a, dass die resultierende Matrix A dünnbesetzt ist, d.h. die Anzahl nichtverschwindender Einträge in A ist proportional zu $|\mathcal{N}_h|$.

Aufgabe 2. Sei V ein Banachraum und sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und positiv semidefinit. Nehmen Sie zusätzlich an, dass Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, so dass

$$c_1 \|v\|_V \le \big(a(v,v)\big)^{1/2} \le c_2 \|v\|_V$$

für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass a ein Skalarprodukt auf V definiert und dass V bezüglich dieses Skalarprodukts ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass der lineare Operator $A : V \to W$ genau dann stetig ist, wenn er beschränkt ist in dem Sinne, dass es ein $c > 0$ gibt mit

$$\|Av\|_W \le c\|v\|_V$$

für alle $v \in V$.
(ii) Sei $A : V \to W$ linear und beschränkt und sei $\|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}$ das Infimum aller dieser Konstanten $c > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt

$$\|Av\|_W \le \|A\|_{\mathrm{L}(V,W)} \|v\|_V.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $A \mapsto \|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}$ eine Norm auf dem Raum der linearen und beschränkten Operatoren $\mathrm{L}(V,W)$ definiert, so dass dieser ein Banachraum ist.

Aufgabe 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $I(v) = (1/2)\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x$.
(a) Zeigen Sie direkt, dass I schwach unterhalbstetig, strikt konvex und koerziv auf $H^1_0(\Omega)$ ist.
(b) Beweisen Sie, dass I stetig, aber nicht schwach stetig auf $H^1_0(\Omega)$ ist.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`