Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Montag, den 7. Januar 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{M} = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die signierte Distanzfunktion.
(i) Zeigen Sie, dass ∇d auf $\mathcal{M}$ mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor übereinstimmt.
(ii) Sei $n = 3$, $x_0 \in \mathcal{M}$ und $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Kurve mit $\phi(0) = x_0$ sowie $\phi(s) \in \mathcal{M}$ und $|\phi'(s)| = 1$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Durch $\phi''(0)$ wird eine Krümmung von $\mathcal{M}$ bei x_0 in Richtung des Vektors $\phi'(0)$ definiert. Die mittlere Krümmung $H(x_0)$ ist der Mittelwert aus maximaler und minimaler Krümmung bei x_0. Zeigen Sie, dass

$$H(x_0) = \Delta d(x_0).$$

(iii) Verifizieren Sie die Identitäten am Beispiel $\mathcal{M} = \partial B_r(0)$.

Aufgabe 2. (i) Seien $u, v \in \mathbb{R}^d$ mit $u \neq 0$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Bestimmen Sie die Ableitung $\phi'(0)$ der Abbildung

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\Big|A\frac{u+tv}{|u+tv|}\Big|^2.$$

(ii) Sei $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $|u(x)|^2 = 1$ für fast alle $x \in \Omega$ minimal für die Dirichlet-Energie unter allen solchen Abbildungen mit gegebenen Dirichlet-Bedingungen. Bestimmen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung, indem Sie für $v \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ folgende Funktion ϕ ableiten:

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big|\nabla\frac{u+tv}{|u+tv|}\Big|^2 \,\mathrm{d}x.$$

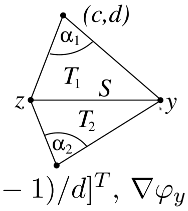
Aufgabe 3. Für eine konvexe Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ sei $F^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ definiert durch

$$F^*(q) = \sup_{s\in\mathbb{R}^n} q\cdot s - F(s).$$

Bestimmen Sie F^* für die Funktion $F(s) = (1/p)|s|^p$, $p \geq 1$, und Indikatorfunktional $F(s) = I_{\overline{B_r(0)}}(s)$, $r > 0$.

Aufgabe 4. Sei $S = \operatorname{conv}\{z, y\}$ eine gemeinsame Kante der Dreiecke T_1, T_2 und seien α_1, α_2 die der Kante gegenüberliegenden Innenwinkel von T_1 beziehungsweise T_2. Zeigen Sie, dass für die den Knoten z, y zugeordneten Hutfunktionen φ_z und φ_y gilt

$$\int_{T_1\cup T_2} \nabla\varphi_z\cdot\nabla\varphi_y \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2).$$



Hinweis: Nehmen Sie $z = (0,0)$, $y = (1,0)$ an, zeigen Sie $\nabla\varphi_z|_{T_1} = [-1, (c-1)/d]^T$, $\nabla\varphi_y|_{T_1} = [1, -c/d]^T$, und verwenden Sie $\cot(\beta+\gamma) = (\cot\beta\cot\gamma - 1)/(\cot\beta + \cot\gamma)$.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`