Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 11

Abgabe: Bis Montag, den 14. Januar 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{T}_h$ eine reguläre Triangulierung des Lipschitz-Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $(\varphi_z : z \in \mathcal{N}_h)$ die nodale Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$. Für $v \in L^1(\Omega)$ und $z \in \mathcal{N}_h$ sei $\mathcal{J}_h v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ definiert durch

$$v_h = \sum_{z \in \mathcal{N}_h} v_z \varphi_z, \quad v_z = \frac{1}{|\omega_z|} \int_{\omega_z} v \, \mathrm{d}x,$$

wobei $\omega_z = \operatorname{supp} \varphi_z$ sei. Weiter sei $h_z = \operatorname{diam}(\omega_z)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften mit einer nur von der Geometrie von $\mathcal{T}_h$ und $1 \le p \le \infty$ abhängigen Konstanten $c > 0$:

$$\nabla \mathcal{J}_h v = \sum_{z \in \mathcal{N}_h} (v_z - v) \nabla \varphi_z, \quad \|v - v_z\|_{L^p(\omega_z)} \le c h_z \|\nabla v\|_{L^p(\omega_z)}, \quad \|\nabla \varphi_z\|_{L^\infty(\omega_z)} \le c h_z^{d/p-1}.$$

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung, so dass für paarweise verschiedene Knoten $z, y \in \mathcal{N}_h$ gilt $k_{zy} = \int_\Omega \nabla \varphi_z \cdot \nabla \varphi_y \, \mathrm{d}x \le 0$.
(i) Zeigen Sie, dass für alle $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gilt

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\frac{1}{2} \sum_{z,y \in \mathcal{N}_h} k_{zy} |v_h(z) - v_h(y)|^2.$$

(ii) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und für $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ sei $v_h^F = \mathcal{I}_h(F \circ v_h)$. Zeigen Sie, dass

$$\|\nabla v_h^F\|_{L^2(\Omega)} \le |F|_{\mathrm{Lip}} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

und folgern Sie das diskrete Maximumsprinzip für das Poisson-Problem.

Aufgabe 3. Sei $\widetilde{u}_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ so, dass für $u_D = \widetilde{u}_D|_{\partial\Omega}$ gilt $|u_D(x)| = 1$ für fast alle $x \in \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}x$$

für jedes $\varepsilon > 0$ eine Minimalstelle $u_\varepsilon \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ mit $u|_{\partial\Omega} = u_D$ besitzt und dass jeder Häufungspunkt für $\varepsilon \to 0$ eine harmonische Abbildung ist.

Aufgabe 4. Sei $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ein konvexes Funktional mit Subdifferential

$$\partial J(u) = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot (w - u) + J(u) \le J(w) \text{ f.a. } w \in \mathbb{R}^n\}.$$

(a) Zeigen Sie für $j = 1, 2$ und $u_j, v_j \in \mathbb{R}^n$ mit $v_j \in \partial J(u_j)$ die Monotonieeigenschaft

$$(v_1 - v_2) \cdot (u_1 - u_2) \ge 0.$$

(b) Ist $J^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ für $v \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $J^*(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} v \cdot u - J(u)$, so gilt

$$v \in \partial J(u) \iff u \in \partial J^*(v).$$