Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 12

Abgabe: Bis Montag, den 21. Januar 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Sei $\Omega = B_r(0) \subset \mathbb{R}^d$ und $u(x) = x/|x|$. Zeigen Sie, dass u die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-\Delta u = |\nabla u|^2 u$$

in einem geeigneten Sinn auf Ω erfüllt und dass $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ für $d = 3$ nicht jedoch für $d = 2$ gilt.

Aufgabe 2. Die duale Formulierung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω mit Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ ist gegeben durch das Maximierungsproblem:

$$\text{Maximiere} \quad \frac{1}{2}\|p\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{unter der Nebenbedingung} \ -\operatorname{div} p = f.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Identität $|s|^2/2 = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} v \cdot s - |v|^2/2$, dass sich das duale Problem durch formale Vertauschung von Extrema aus der Formulierung des Poisson-Problems als Minimierungsproblem ableiten lässt und die optimalen Werte miteinander in Verbindung stehen. Rechtfertigen Sie anschließend die Rechnungen.

Aufgabe 3. (i) Sei $p : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine polynomielle Abbildung mit der Eigenschaft $|p(x)| = 1$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass p konstant ist.
(ii) Definieren und untersuchen Sie eine Diskretisierung harmonischer Abbildungen mit $P2$-Elementen, das heißt eine geeignete Approximation harmonischer Abbildungen durch stückweise quadratische, global stetige Finite-Elemente-Funktionen.

Aufgabe 4. Verwenden Sie die Aussagen aus Aufgabe 1 von Blatt 11 um für den dort definierten Operator $\mathcal{J}_h$ zu zeigen, dass

$$\|h_{\mathcal{T}}^{-1}(v - \mathcal{J}_h v)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(v - \mathcal{J}_h v)\| \le c\|\nabla v\|$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$. Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum nodalen Interpolationsoperator.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`