Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 13

Abgabe: Bis Montag, den 28. Januar 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Sei $u \in H^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ mit $k \geq 1$ und $|u(x)| \geq 1$ für fast alle $x \in \Omega$.
(i) Zeigen Sie, dass für die durch $Pu = u/|u|$ definierte Funktion Pu gilt $Pu \in H^1(\Omega)$ mit

$$\|\nabla Pu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $k = 2$ im Allgemeinen nicht gilt, dass

$$\|D^2 Pu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dafür ist es ausreichend, den eindimensionalen Fall $\Omega \subset \mathbb{R}$ zu betrachten.

Aufgabe 2. (i) Konstruieren Sie eine beschränkte Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,1}(\Omega)$, die einen Grenzwert in $L^1(\Omega)$ nicht jedoch in $W^{1,1}(\Omega)$ besitzt.
(ii) Sei $u : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 & \text{falls } x_1 \leq x_2, \\ x_2^2 & \text{falls } x_2 > x_1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u \in BV(\Omega)$ und mit bestimmen Sie $\|u\|_{BV(\Omega)}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgende Diskretisierung der Allen-Cahn-Gleichung ein diskretes Maximumsprinzip erfüllt, sofern $\mathcal{T}_h$ schwach spitzwinkelartig ist: Zu gegebenem $u_h^0 \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ mit $|u_h^0(x)| \leq 1$ für alle $x \in \Omega$ und $\tau > 0$ bestimme die Folge $(u_h^k)_{k=0,1,\ldots} \subset \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ rekursiv, sodass

$$\int_\Omega \mathcal{I}_h[d_t u_h^k v_h]\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u_h^k \cdot \nabla v_h\,\mathrm{d}x = -\varepsilon^{-2} \int_\Omega \mathcal{I}_h[f(u_h^k) v_h]\,\mathrm{d}x$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$.

Aufgabe 4. Seien $K_0^\pm \subset H_0^1(\Omega)$ definiert durch

$$K_0^\pm = \{v \in H_0^1(\Omega) : \pm v \geq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass für die Indikatorfunktionale gilt $I_{K_0^+}^* = I_{K_0^-}$.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`

Aufgabe X. Lösen Sie für einen gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ das folgende Minimierungsproblem:

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{p}|x|_p^p + \alpha|x - b|_2^2.$$

Charakterisieren Sie die Lösung allgemein, diskutieren Sie Eindeutigkeit und geben Sie sie für im Beispiel $b = [2, -2, 1]$ konkret an.