Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 2

Abgabe: Bis Montag, den 29. Oktober 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Es sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ definiert durch $v_{j,n} = \delta_{j,n}$, d.h.,

$$v_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots].$$

Zeigen Sie, dass die Folge schwach konvergiert und bestimmen Sie den schwachen Grenzwert.

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\chi \in L^2(\Omega)$. Diskutieren Sie, welche der folgenden Teilmengen schwach abgeschlossen im jeweils angegebenen Banach-Raum sind:

(i) $\{v \in H^1(\Omega) : v \geq \chi \text{ f.ü. in } \Omega\} \subset H^1(\Omega)$;
(ii) $\{v \in L^2(\Omega) : v \geq \chi \text{ f.ü. in } \Omega\} \subset L^2(\Omega)$;
(iii) $\{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\} \subset H^1(\Omega)$;
(iv) $\{v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\} \subset L^2(\Omega)$;
(v) $\{v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\} \subset L^2(\Omega)$;
(vi) $\{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^1(\Omega)$;
(vii) $\{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : |v(x)| = 1 \text{ f.f.a. } x \in \Omega\}$.

Hinweis: Das Lemma von Mazur impliziert, dass jede konvexe abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raums schwach abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0, 2\pi)$ sei $u_n(x) = \sin(nx)$. Zeigen Sie, dass $u_n \rightharpoonup 0$ und $u_n^2 \rightharpoonup 1/2$ in $L^2(0, 2\pi)$ gilt. Ist die Folge (u_n) stark konvergent?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Minimierungsprobleme keine Lösungen besitzen und erläutern Sie, welche Voraussetzungen der direkten Methode der Variationsrechnung verletzt sind und welche Bedingungen jeweils erfüllt sind.

(a) Gesucht ist $y \in W^{1,2}(-1, 1)$ mit $y(-1) = -1$ und $y(1) = 1$ als Minimalstelle von

$$I(y) = \int_{(-1,1)} (xy'(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

(b) Finde $u \in W^{1,4}(0, 1)$ als Minimum von

$$I(u) = \int_{(0,1)} (u'(x)^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}x + \|u\|_{L^4(0,1)}^4.$$

Hinweis: Konstruieren Sie in beiden Fällen Infinimalfolgen, die aus stückweise affinen Funktionen bestehen, und zeigen Sie, dass das jeweilige Infimum nicht angenommen werden kann.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`