Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Montag, den 5. November 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Das *Subdifferential* ∂f einer konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : s \cdot (y - x) + f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Subdifferentiale folgender Funktionen:

$$\text{(i) } f(x) = |x|, \quad \text{(ii) } f(x) = \max\{3x_1, 0\}, \quad \text{(iii) } f(x) = I_{\overline{B_1(0)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \overline{B_1(0)}, \\ +\infty & \text{falls } x \notin \overline{B_1(0)}. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass $0 \in \partial f(x)$ genau dann gilt, wenn x ein Minimum von f ist.
(c) Zeigen Sie, dass Elemente aus $\partial f(x)$ im Allgemeinen keine Abstiegsrichtungen sind.
(d) Zeigen Sie, dass $\partial f(x) = \{s\}$ für ein $s \in \mathbb{R}^n$ genau dann gilt, wenn f in x differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Minimierungsprobleme für geeignete Randdaten definiert durch $u_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ Lösungen in $\mathcal{A} = \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m) : v|_{\partial\Omega} = u_D\}$ besitzen:
(a) Finde ein minimales $u \in \mathcal{A}$ für

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}x.$$

(b) Unter der Nebenbedingung $|u(x)| = 1$ fast überall in Ω minimiere die Dirichlet-Energie.
(c) Für $m = 1$ und $f, \chi \in L^2(\Omega)$ bestimme ein Minimum von

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f u \, \mathrm{d}x$$

unter der Nebenbedingung $u(x) \geq \chi(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Aufgabe 3. Für ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und Randdaten $u_D \in C(\partial\Omega)$ betrachten wir das Funktional $I(u) = \int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{1/2} \, \mathrm{d}x$ für Funktionen $u \in H^1(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = u_D$.
(a) Zeigen Sie, dass eine Minimalstelle $u \in H^1(\Omega)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \, \mathrm{d}x = 0$$

für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ erfüllt.
(b) Ist u rotationssymetrisch, das heißt gilt $u(x) = \psi(|x|)$, so erfüllt ψ die Gleichung

$$\Big(\frac{r\psi'(r)}{(1 + |\psi'(r)|^2)^{1/2}} \Big)' = 0.$$

Aufgabe 4. (i) Lösen Sie die Differentialgleichung aus Aufgabe 3 analytisch und konstruieren Sie für eine geeignete Wahl von $0 < r_1 < r_2$ eine exakte Lösung im Intervall (r_1, r_2).
(ii) Diskutieren Sie anhand der Formel aus (i) die Existenz von Lösungen des Minimierungsproblems und überprüfen Sie die Anwendbarkeit der direkten Methode der Variationsrechnung.
Hinweis: Es gilt $\operatorname{arcosh}'(r) = 1/(r^2 - 1)^{1/2}$.