Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Montag, den 12. November 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. (Lemma von Gronwall)
(a) Seien $y \in C^1([0,T])$ und $g \in C([0,T])$ so, dass für alle $t \in [0,T]$ gilt

$$y'(t) \leq g(t)y(t).$$

Folgern Sie, dass dann $\max_{t\in[0,T]} y(t) \leq y(0) \exp\big(\int_0^T g(s)\,\mathrm{d}s\big)$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $t \mapsto y(t)/v(t)$ monoton fallend ist mit $v(t) = \exp\big(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\big)$.
(b) Seien $(y^\ell)_{\ell=0,\dots,L}$ eine nicht-negative Zahlenfolge und $c_0, g \geq 0$ so, dass für $\ell = 0, 1, \dots, L$

$$y^\ell \leq c_0 + \sum_{k=0}^{\ell-1} g y^k$$

gilt. Zeigen Sie, dass $y^\ell \leq c_0(1+g)^\ell \leq c_0 \exp\big(Lg\big)$ für $\ell = 0, 1, \dots, L$ gilt.

Aufgabe 2. (a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ so, dass $f''(x) \geq -c$ für eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes $M \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto M|x|^2/2 + f(x)$ strikt konvex ist.
Hinweis: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist strikt konvex genau dann, wenn $\varphi''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass für ein hinreichend kleines $\tau_0 > 0$ und alle $0 < \tau \leq \tau_0$ das durch das Funktional

$$I(u) = \frac{1}{2\tau}\|u - \widetilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (u^2-1)^2\,\mathrm{d}x$$

definierte Minimierungsproblem für jedes $\widetilde{u} \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass für konvexes $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, das eine Minimalstelle y_m besitze und $f := -F'$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung bzw. des Gradientenflusses

$$y'(t) = f(y),\ y(0) = y_0,$$

beschränkt bleibt.Verwenden Sie dazu ein Minimum von F und testen Sie geeignet, um die Monotonie von F' auszunutzen.
(ii) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe des Satzes von Peano Langzeitexistenz folgern kann.
(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion y für $t \to \infty$ gegen ihr Minimum konvergiert, falls F sogar streng konvex ist, d.h. es gilt $(F'(a) - F'(b))(a-b) \geq c|a-b|^2$ für ein $c > 0$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Es bezeichne $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$.
(i) Zeigen Sie, dass der Raum $H^{-1}(\Omega) := H^1_0(\Omega)'$ mit den Funktionalen F_w, definiert durch $F_w(v) = (\nabla v, \nabla w), w \in H^1_0(\Omega)$, identifiziert werden kann.
(ii) Zeigen Sie, dass die Einbettung von $L^2(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$ durch $G_w(v) = (v, w)$ einen echten Unterraum definiert.