Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 5

Abgabe: Bis Montag, den 19. November 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Seien X und Y Banachräume und sei $A : X \to Y$ linear und beschränkt. Zeigen Sie, dass A schwach-schwach-stetig ist, das heißt für jede schwach konvergente Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ ist die Folge $(Ax_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset Y$ schwach konvergent. Inwiefern ist diese Implikation relevant bei der Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung?

Aufgabe 2. Wir betrachten den L^2-Gradientenfluss

$$\partial_t u = \Delta u - f(u), \quad u(0) = u_0,$$

wobei $f = F'$ mit einer nicht-negativen Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$ gelte, sodass f Lipschitz-stetig ist. Es sei $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^1_0(\Omega)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators. Konstruieren Sie eine Lösung des Gradientenflusses als geeigneten Grenzwert von Approximationslösungen $U_N : [0,T] \to X_N = \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ die jeweils gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen.

Aufgabe 3. Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ die punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ konvergiere.
(i) Zeigen Sie, dass f_n gegen f nach Maß konvergiert, das heißt für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^d(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

Hinweis: Sie dürfen zentrale Sätze der Maß- und Integrationstheorie wie die Sätze von Egoroff und Vitali unter genauer Angabe verwenden.
(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $p = 1$ und unter der Zusatzvoraussetzung $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Allgemeinen nicht die schwache Konvergenz $f_n \rightharpoonup f$ für $n \to \infty$ gefolgert werden kann.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die rotationssymmetrische Lösung des zweidimensionalen Hindernisproblems auf $\Omega = B_2(0)$ mit $f = -2$ und $u_{\mathrm{D}}(x,y) = 3/2 - \ln(2)$ sowie Hindernis $\chi(x,y) = 0$, das heißt die Lösung $u \in H^1(B_2(0))$ mit $u \geq \chi$ und $u|_{\partial\Omega} = u_{\mathrm{D}}$ der Variationsungleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u - v)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(u - v)\,\mathrm{d}x$$

für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ mit $v \geq \chi$. Skizzieren Sie die Lösung.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`