Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Montag, den 26. November 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Wir betrachten die nichtlineare Wellengleichung in $(0, T) \times \Omega$

$$\partial_t^2 u = \Delta u - f(u), \quad u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = v_0, \quad u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

wobei $f = F'$ mit einer nicht-negativen Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$ gelte, sodass f Lipschitz-stetig ist. Konstruieren Sie eine Lösung in einem geeigneten Bochner–Sobolev-Raum durch Verwendung einer Orthonormalbasis des Laplace Operators.

Aufgabe 2. Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ die punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ konvergiere und für die $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \le c$ für all $n \in \mathbb{N}$ gelte. Zeigen Sie, dass $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Egoroff, um eine geeignete Aufteilung des Integrationsgebiets zu erhalten und die Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals auszunutzen.

Aufgabe 3. Für $\phi \in L^2(\Omega)$ ist die Operatornorm des zugehörigen Funktionals $T_\phi \in H_0^1(\Omega)'$, $T_\phi(v) = (v, \phi)$, gegeben durch

$$\|\phi\|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{(v, \phi)}{\|\nabla v\|},$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ und $\|\cdot\|$ das Skalarprodukt und die Norm in $L^2(\Omega)$ bezeichnen. Es sei $u_h \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h)$ die Galerkin-Approximation des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω mit $u|_{\partial\Omega} = 0$ mit quadratischen Ansatzfunktionen. Es gelte $f \in H_0^1(\Omega)$ und das Poisson-Problem sei 3-regulär, das heißt es gelte $\|D^3 w\| \le c_3 \|\nabla g\|$ für alle $w, g \in H_0^1(\Omega)$ mit $-\Delta w = g$. Beweisen Sie die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{-1} \le ch^4 \|\nabla f\|.$$

Welche Konvergenzordnung lässt sich für die Approximation in $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ beweisen?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\theta(t) = t/(1 + t)$ und $\theta(t) = (2/\pi) \arctan(t)$ für $t \ge 0$ und $\theta(t) = 0$ für $t \le 0$ die Eigenschaften $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $\theta'(t) \ge 0$ und $0 \le \theta(t) \le 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie $1 - \theta(t) \le c_\theta t^{-1}$ für $t > 0$ erfüllen.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`