Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 7

Abgabe: Bis Montag, den 3. Dezember 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Für eine schwache differenzierbare Funktion $u \in L^1(\Omega)$ betrachten wir die Funktion $u^+ = \max\{u, 0\}$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$\nabla u^+(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{falls } u(x) > 0, \\ 0 & \text{falls } u(x) \le 0. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie $u_\varepsilon = f_\varepsilon \circ u$ mit $f_\varepsilon(r) = (r^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$ für $r \ge 0$ und $f_\varepsilon(r) = 0$ für $r \le 0$, verwenden Sie die Kettenregel für schwache Ableitungen und betrachten Sie den Grenzwert $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 2. Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^1_0(\Omega)$ und $F \in C(\mathbb{R})$ mit $0 \le F(z) \le c(1 + |z|^r)$. Formulieren Sie möglichst schwache Bedingungen an $r > 0$, sodass für eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\int_\Omega F(u_{n_k})\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x$$

für $k \to \infty$ mit einer geeigneten Funktion $u \in H^1_0(\Omega)$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 von Blatt 6.

Aufgabe 3. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Es bezeichne $P_K : \mathbb{R}^n \to K$ die orthogonale Projektion auf K bezüglich der euklidischen Norm.
(i) Definieren Sie $P_K b$ durch ein restringiertes Minimierungsproblem.
(ii) Leiten Sie eine beschreibende Variationsungleichung für $P_K b$.
(iii) Approximieren Sie $P_K b$ durch eine konforme Penalisierungsmethode. Geben Sie einen möglichst direkten Nachweis der Konformität.

Aufgabe 4. Für einen Hilbert-Raum X seien $a : X \times X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzive (möglicherweise nicht-symmetrische) Bilinearform und $\ell \in X'$. Es sei $A : X \to X'$ definiert durch $\langle Ax, y\rangle = a(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Ferner bezeichne $R : X' \to X$ den Rieszschen Darstellungsoperator. Für eine abgeschlossene und konvexe Menge $K \subset X$ sei $P_K : X \to K$ die orthogonale Projektion auf K. Zeigen Sie, dass für $\theta > 0$ hinreichend klein durch

$$T_\theta : u \mapsto P_K(u - \theta(Au - \ell))$$

eine Kontraktion definiert wird und folgern Sie die Existenz einer eindeutigen Lösung der Variationsungleichung $\langle Au - \ell, v - u\rangle \ge 0$ für alle $v \in X$.
Hinweis: Der Operator $P_K : X \to K$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`