Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Montag, den 10. Dezember 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Wir betrachten das Hindernisproblem mit homogenen Dirichlet-Randdaten sowie Hindernis χ und rechter Seite f im beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass das Problem stabil hinsichtlich kleiner Störungen von χ und f ist.

Aufgabe 2. Seien $(a^k)_{k=0,1,\dots}$, $(b^k)_{k=1,2,\dots}$ und $(c^k)_{k=1,2,\dots}$ Folgen in einem Hilbert-Raum H, wobei $c^k \neq 0$ für $k = 0, 1, \dots$ gelte. Für eine Schrittweite $\tau > 0$ bezeichne d_t den Rückwärts-Differenzenquotienten $d_t a^k = (a^k - a^{k-1})/\tau$.
(i) Leiten Sie die diskrete Produkt- und Quotientenregel her:

$$d_t(a^k \cdot b^k) = (d_t a^k) \cdot b^{k-1} + a^k \cdot (d_t b^k),$$
$$d_t\big(1/c^k\big) = -d_t c^k/(c^{k-1} c^k).$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$a^{k-\theta} \cdot d_t a^k = \frac{1}{2} d_t \|a^k\|^2 + (1-2\theta)\frac{\tau}{2}\|d_t a^k\|^2$$

gilt, wobei $\theta \in [0,1]$ und $a^{k-\theta} = \theta a^{k-1} + (1-\theta)a^k$ seien.

Aufgabe 3. Lösen Sie möglichst systematisch die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= -(2y)^{-1}, \quad y(0) = y_0, \\ z' &= 1 - z^2, \quad z(0) = 0, \\ y'' &= y^3 - y, \quad y(0) = 0, \quad y(s) \to 1 \text{ für } s \to \infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Leiten Sie eine Variationsungleichung für das folgende Minimierungsproblem her:

$$\text{Minimiere} \quad I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$$
unter $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit $u|_{\partial\Omega} = u_\mathrm{D}$
und der Nebenbedingung $|u(x)|^2 \leq 1$ für fast alle $x \in \Omega$

Führen Sie einen Lagrange-Multiplikator ein, um die Optimalitätsbedingung äquivalent als Variationsgleichung zu schreiben und geben Sie die zugehörige starke Formulierung an.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2/`