Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Montag, den 17. Dezember 2018, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. (a) Beweisen Sie das klassische Gronwall-Lemma, das heißt sind $u \in C([0,T])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \geq 0$ und

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in [0,T]$, so folgt $u(t) \leq \alpha e^{\beta t}$ für alle $t \in [0,T]$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $v(t) = e^{-\beta t} \int_0^t \beta u(s)\,\mathrm{d}s$ und deren Ableitung.
(b) Verwenden Sie das verallgemeinerte Gronwall-Lemma, um die Differenz der Lösungen der beiden folgenden Anfangswertprobleme abzuschätzen:

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0; \qquad z' = z^2 + r, \quad z(0) = z_0.$$

Nehmen Sie dabei an, dass y auf dem Intervall $[0,T]$ existiert und beschränkt ist.

Aufgabe 2. Diskutieren Sie auf ein bis zwei Seiten mit Beispielen, Erklärungen und Skizzen die Beurteilung der Stabilität eines stationären Punktes $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(y)$$

anhand der Eigenwerte der als diagonalisierbar angenommenen Matrix $Df(\overline{y})$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für gegebene Zahlen $\alpha, b \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ das Minimum x_b der Abbildung

$$x \mapsto \alpha|x| + \frac{1}{2}(x-b)^2$$

und skizzieren Sie die Abbildung $b \mapsto x_b$ für $b = 1$ und zwei verschiedene Wert von α.

Aufgabe 4. (a) Sei $(a^k)_{k=0,1,\dots}$ eine Folge von Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass mit dem Rückwärts-Differenzenquotienten $d_t c^k = (c^k - c^{k-1})/\tau$ und der regularisierten Betragsfunktion $|a|_\varepsilon = (|a|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ für $k = 1, 2, \dots$ gilt

$$d_t |a^k|_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d_t |a^k|_\varepsilon^2}{|a^{k-1}|_\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\tau (d_t |a^k|_\varepsilon)^2}{|a^{k-1}|_\varepsilon}.$$

(b) Folgern Sie, dass für die Iterierten $(u^k) \subset H^1(\Omega)$ des diskretisierten Gradientenflusses

$$(d_t u^k, v) + \int_\Omega \frac{\nabla u^k \cdot \nabla v}{|\nabla u^{k-1}|_\varepsilon}\,\mathrm{d}x = 0$$

das diskrete Energiegesetz

$$\int_\Omega |\nabla u^K|_\varepsilon\,\mathrm{d}x + \tau \sum_{k=1}^K \|d_t u^k\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u^0|_\varepsilon\,\mathrm{d}x.$$

gilt.