Praktikum zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen II: Nicht-lineare partielle Differenzialgleichungen

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos
M.Sc.-Math. J. Keck

Übungsblatt 3

Projekt 5.
Eine Möglichkeit, Lösungen des Hindernisproblems zu approximieren, ist die Einführung eines Terms, der die Verletzung der Bedingung $u \geq \chi$ bestraft.
Hier soll das Funktional $I_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, welches durch

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int\limits_\Omega fu \, dx + \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\int\limits_\Omega (u-\chi)_-^2 \, dx$$

definiert ist, minimiert werden. Dabei sind $f \in L^2(\Omega)$, $\chi \in H^1(\Omega)$ mit $\chi_{|\partial\Omega} \leq 0$ und $(s)_- = \min(s, 0)$.
Schreiben Sie ein Programm, das mithilfe des Abstiegsverfahrens ein Minimum von I_ε in $S_0^1(\mathscr{T}_h)$ approximiert. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0,1)^2$, $f \equiv -5$, $\chi(x) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \cdot \cos(2\pi x_1)$ und $\varepsilon = 10^{-k}$ mit $k = 0, ..., 3$. Wie wirken sich die verschiedenen Werte von ε auf die Lösung aus?

Projekt 6. Der folgende Algorithmus bietet eine weitere Möglichkeit zur Approximation von Lösungen des Hindernisproblems (primal-dual active set method).
Seien $(U^0, \Lambda^0) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L$ und $c > 0$. Berechne $(U^k, \Lambda^k)_{k=0,1,...}$ durch

$$\mathscr{A}_k = \{1 \leq i \leq L \ : \ \Lambda_i^k + c(U_i^k - Z_i) < 0\}$$

und

$$\begin{bmatrix} A & I_L \\ I_{\mathscr{A}_k} & I_{\mathscr{A}_k^c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ I_{\mathscr{A}_k} Z \end{bmatrix}.$$

Stoppe die Iteration, wenn $|||U^{k+1} - U^k||| \leq \varepsilon_{stop}$. Dabei sind A die bekannte Steifigkeitsmatrix des Poisson-Problems, $I_{\mathscr{A}} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ mit

$$(I_{\mathscr{A}})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ und } i \in \mathscr{A}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $|||U||| = ||\nabla u_h||$ falls U Koeffizientenvektor der Funktion $u_h \in S_0^1(\mathscr{T}_h)$ ist. Nehmen wir zusätzlich die Randbedingungen $u_{|\partial\Omega} = 0$ an, sind $B_i = \int_\Omega f\varphi_i dx$ und $Z_i = \chi(z_i)$.
Implementieren Sie das beschriebene Verfahren und testen Sie es wie in Projekt 5.

Abgabe: Bis Sonntag, den 25. November 2018 an den Tutor.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2`