Praktikum zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen II: Nicht-lineare partielle Differenzialgleichungen

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos
M.Sc.-Math. J. Keck

Übungsblatt 4

Projekt 7.
Wir betrachten die Allen-Cahn-Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = -\varepsilon^{-2} f(u), \qquad u(0) = u_0, \qquad \partial_n u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

für fast alle $t \in [0,T]$. Dabei sind $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ und $f(s) = s^3 - s$.
Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren, welches in jedem Zeitschritt die Gleichung

$$(d_t u_h^k, v_h) + (\nabla u_h^k, \nabla v_h) + \varepsilon^{-2}\big(f(u_h^{k-1}), v_h\big)_h = 0$$

für alle $v_h \in S^1(\mathscr{T}_h)$ löst. Dabei bezeichnet

$$(v,w)_h = \int_\Omega \mathcal{I}_h(vw)\,\mathrm{d}x$$

das diskrete L^2-Skalarprodukt. Verwenden Sie $\Omega = (-1,1)^2$, $u_0(x) = \tanh\big((|x| - 0.5)/(\sqrt{2}\varepsilon)\big)$ sowie $T = 10$ und testen Sie das Programm auf Stabilität. Setzen Sie dafür $\varepsilon = 2^{-\ell}$ sowie die Zeitschrittweite $\tau = h^\alpha$ und experimentieren Sie mit verschiedenen Werten von h, ℓ und α. Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie verzeichnen, unter welchen Bedingungen das Verfahren stabil ist.

Projekt 8. Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Allen-Cahn-Gleichung ist ein linearisiertes, semi-implizites Euler-Verfahren, das in jedem Zeitschritt die Gleichung

$$(d_t u_h^k, v_h) + (\nabla u_h^k, \nabla v_h) + \varepsilon^{-2}\big(f'(u_h^{k-1})(u_h^k - u_h^{k-1}), v_h\big)_h = -\varepsilon^{-2}\big(f(u_h^{k-1}), v_h\big)_h$$

für alle $v_h \in S^1(\mathscr{T}_h)$ löst. Implementieren Sie auch dieses Verfahren und führen Sie die gleichen Stabilitätstests wie in Projekt 7 durch. Welche Unterschiede fallen Ihnen auf?

Abgabe: Bis Sonntag, den 9. Dezember 2018 an den Tutor.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2`