Praktikum zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen II: Nicht-lineare partielle Differenzialgleichungen

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos
M.Sc.-Math. J. Keck

Übungsblatt 5

Projekt 9. Wir betrachten die Allen-Cahn-Gleichung aus den Projekten 7 und 8. Man kann zeigen, dass sich der kleinste Eigenwert des linearisierten Allen-Cahn-Operators bezüglich der Approximationslösung zum Zeitpunkt $t_k = k\tau$ durch folgenden Algorithmus approximieren lässt.
Seien $w_h^0 \in S^1(\mathscr{T}_h)$, sodass $\|w_h^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $c_{\text{shift}} = \|f'(u_h^k)\|_{L^\infty(\Omega)} + 1$ und $(\cdot,\cdot)_\lambda : S^1(\mathscr{T}_h) \times S^1(\mathscr{T}_h) \to \mathbb{R}$ mit

$$(w_h, v_h)_\lambda = (\nabla w_h, \nabla v_h) + \varepsilon^{-2}(w_h, v_h)_h + c_{\text{shift}}(w_h, v_h).$$

Berechne Λ^j, $j = 0, 1, \ldots$ durch $\Lambda^0 = (w_h^0, w_h^0)_\lambda$ sowie

$$(\widetilde{w}_h^j, v_h)_\lambda = (w_h^{j-1}, v_h)$$

für alle $v_h \in S^1(\mathscr{T}_h)$, $w_h^j = \widetilde{w}_h^j / \|\widetilde{w}_h^j\|_{L^2(\Omega)}$ und $-\Lambda^j + c_{\text{shift}} = (w_h^j, w_h^j)_\lambda$. Stoppe, falls $|\Lambda^j - \Lambda^{j-1}| \leq \varepsilon_{\text{stop}}$.
Erweitern Sie Ihr Programme aus Projekt 7, sodass der kleinste Eigenwert Λ in jedem Zeitschritt approximiert und dessen Entwicklung in der Zeit grafisch dargestellt wird. Testen Sie das Programm sowohl für stabile, als auch für instabile Konfigurationen von Parametern. Was fällt Ihnen auf?

Projekt 10. Wir betrachten das Cahn-Hillard-System

$$\begin{aligned} u_t - \Delta\big(\varepsilon^{-1} f(u) - \varepsilon \Delta u\big) &= 0 \quad \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\big(\varepsilon^{-1} f(u) - \varepsilon \Delta u\big)}{\partial n} &= 0 \quad \text{in } (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ und $f(s) = s^3 - s$. Für eine schwache Formulierung führen wir die zusätzliche Variable $w = \varepsilon^{-1} f(u) - \varepsilon \Delta u$ ein. In diskreter Form ergibt sich für jeden Zeitschritt das folgende Problem. Suche $u_h^k, w_h^k \in S^1(\mathscr{T}_h)$, sodass

$$\begin{aligned} \int_\Omega d_t u_h^k \phi_h \, dx \quad &+ \int_\Omega \nabla w_h^k \cdot \nabla \phi_h \, dx &&= 0, \\ \int_\Omega \nabla u_h^k \cdot \nabla \psi_h \, dx \quad &- \varepsilon^{-1} \int_\Omega w_h^k \psi_h \, dx &&= -\,\varepsilon^{-2} \int_\Omega f(u_h^{k-1}) \psi_h \, dx \end{aligned}$$

für alle $\phi_h, \psi_h \in S^1(\mathscr{T}_h)$.
Schreiben Sie ein Programm, welches das beschriebene Verfahren zur Approximation von Lösungen des Cahn-Hillard-Systems realisiert. Testen Sie ihren Code mit $\Omega = (-1,1)^2$, $T = 1/5$, $\varepsilon = 1/10$, $\tau = 1/500$, 2^{11} Elementen in der Triangulierung $\mathscr{T}_h$ des Gebiets Ω und u_0 wie in Abbildung 1. Ändern Sie nun die Werte von τ und ε sowie die Feinheit der Triangulierung. Was fällt Ihnen im Hinblick auf Stabilität auf?

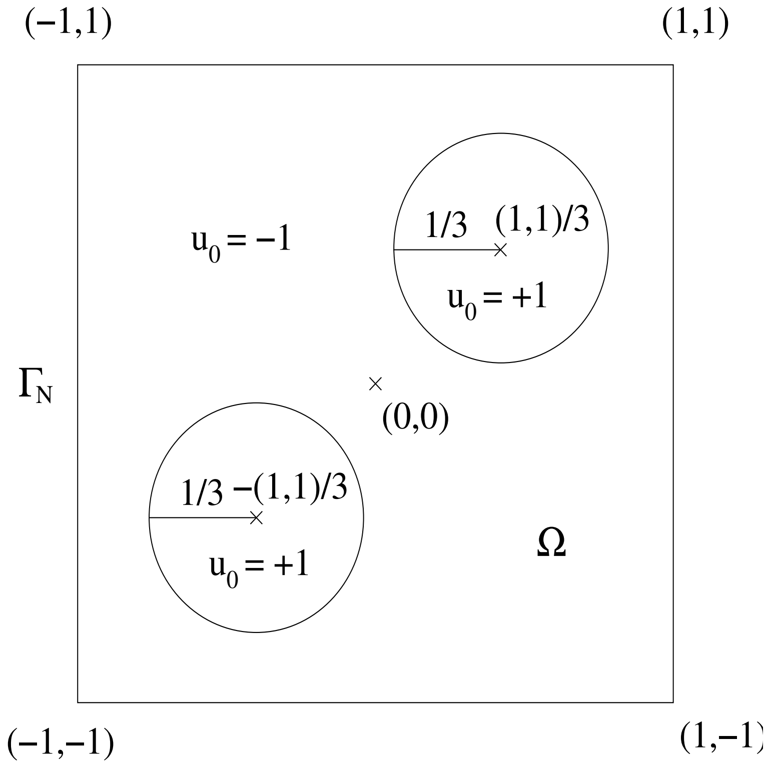

Abbildung 1. Anfangsdaten für das Cahn-Hillard-System.

Abgabe: Bis Sonntag, den 6. Januar 2019 an den Tutor.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2`