Praktikum zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen II: Nicht-lineare partielle Differenzialgleichungen

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos
M.Sc.-Math. J. Keck

Übungsblatt 6

Projekt 11. Wir betrachten harmonische Abbildungen in die Einheitssphäre. Im diskreten Fall bedeutet das, dass wir $u_h \in \mathscr{A}_h := \{v_h \in S^1(\mathscr{T}_h)^m \ : |v_h(z)| = 1 \text{ für alle } z \in \mathscr{N}_h,\ v_{h|\Gamma_D} = u_D\}$ suchen, sodass

$$(\nabla u_h, \nabla w_h) = 0$$

für alle $w_h \in \mathscr{F}[u_h] := \{w_h \in S^1_D(\mathscr{T}_h)^m \ : w_h(z) \cdot u_h(z) = 0 \text{ für alle } z \in \mathscr{N}_h\}$. Wir setzen $\Omega = (0,1)^2$ und $\Gamma_D = \partial\Omega$. Lösungen dieses Problems können durch folgenden Algorithmus (diskreter H^1-Fluss) approximiert werden.
Seien $u_h^0 \in \mathscr{A}_h$, $\theta \in [0,1]$ und $\tau > 0$. Definiere die Folge $(u_h^k)_{k=0,1,...} \subset \mathscr{A}_h$ durch Berechnen von $v_h^k \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ mit

$$(\nabla v_h^k, \nabla w_h) + (\nabla[u_h^{k-1} + \theta\tau v_h^k], \nabla w_h) = 0$$

für alle $w_h \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ und

$$u_h^k = \sum_{z \in \mathscr{N}_h} \frac{u_h^{k-1}(z) + \tau v_h^k(z)}{|u_h^{k-1}(z) + \tau v_h^k(z)|} \varphi_z.$$

Stoppe die Iteration, wenn $\|\nabla v_h^k\| \leq \varepsilon_{stop}$.
Schreiben Sie ein Programm, welches den beschriebenen Algorithmus realisiert. Achten Sie dabei darauf, dass die Funktionen $u_h, v_h, w_h \in S^1(\mathscr{T}_h)^m$ Vektorfelder sind. Ihre Koeffizientenvektoren haben die Form

$$W = [w_h(z_1)^\top, ..., w_h(z_L)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{mL}.$$

Dabei ist $L = \sharp\mathscr{N}_h$.
Hinweis: Verwenden Sie $v_h^k \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ als Nebenbedingung. Das Gleichungssystem zur Berechnung von v_h^k sollte dann die Form

$$\begin{bmatrix} A & B_{U^{k-1}}^\top \\ B_{U^{k-1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{k-1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

haben, wobei $B_{U^{k-1}} \in \mathbb{R}^{L \times mL}$ so konstruiert ist, dass die Bedingung $v_h^k \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ äquivalent zu $B_{U^{k-1}} V^{k-1} = 0$ ist.
Sie können Ihre Ergebnisse mithilfe der MATLAB-Funktionen quiver ($m = 2$) bzw. quiver3 ($m = 3$) visualisieren.

Projekt 12. (i) Testen Sie Ihr Programm aus Projekt 11 mit $m = 3$, randomisierten Anfangsbedingungen und $u_D(x) = [x_1/|x|, x_2/|x|, 0]^\top$.
(ii) Setzen Sie $m = 2$ sowie $u_D(x) = x/|x|$ und untersuchen Sie damit experimentell, wie sich die Nicht-Existenz einer Fortsetzung der Randdaten auf ganz Ω numerisch bemerkbar macht, indem Sie für verschiedene Feinheiten der Triangulierung die Dirichlet-Energien der berechneten

Approximationen betrachten.
(iii) Entfernen Sie den Normierungsschritt aus Ihrem Programm und untersuchen Sie die Verletzung der Bedingung $|u_h^k(z)| = 1$ für alle $z \in \mathscr{N}_h$ in Abhngigkeit von der Schrittweite τ.

Abgabe: Bis Sonntag, den 20. Januar 2019 an den Tutor.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws18/tun2`