Praktikum zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen II: Nicht-lineare partielle Differenzialgleichungen

Wintersemester 2018/19

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos
M.Sc.-Math. J. Keck

Übungsblatt 7 (Bonus)

Projekt 13. Wir wollen das Funktional $I : BV(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$I(u) = |Du|(\Omega) + \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\Omega} |u - g|^2 \; dx$$

für gegebenes $\alpha > 0$ und $g \in L^2(\Omega)$ minimieren. Im diskreten Fall lässt sich dies auf die Suche eines Sattelpunktes des Funktionals

$$L_h(u_h, p_h) = \int\limits_{\Omega} p_h \cdot \nabla u_h \; dx + \frac{\alpha}{2} \|u_h - g\|^2 - I_{K_1(0)}(p_h) \; dx$$

zurückführen, wobei $I_{K_1(0)}$ das Indikatorfunktional der Menge $K_1(0) = \{p \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d) : |p| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega\}$ ist. Wir diskretisieren u stückweise affinlinear und p stückweise konstant. Gradientenfluss in u und p führt zu folgendem Algorithmus (primale duale Iteration).
Seien $s \in [0, 1]$, $\tau > 0$, $(u_h^0, p_h^0) \in S^1(\mathscr{T}_h) \times \mathscr{L}^0(\mathscr{T}_h)^d$ und $d_t u_h^0 = 0$. Definiere des Weiteren das innere Produkt $(\cdot, \cdot)_{h,s}$ auf $S^1(\mathscr{T}_h)$ durch $(u_h, v_h)_{h,s} = (u_h, v_h) + h_{\text{min}}^{(1-s)/s} (\nabla u_h, \nabla v_h)$. (Es gelte $h_{\text{min}}^{(1-s)/s} = 0$, falls s = 0.) Berechne $(u_h^k, p_h^k) \in S^1(\mathscr{T}_h) \times \mathscr{L}^0(\mathscr{T}_h)^d$ für $k = 1, \ldots$ durch $\tilde{u}_h^k = u_h^{k-1} + \tau d_t u_h^{k-1}$ und das System

$$(-d_t p_h^k + \nabla \tilde{u}_h^k, q_h - p_h^k) \leq 0,$$
$$(d_t u_h^k, v_h)_{h,s} + (p_h^k, \nabla v_h) + \alpha(u_h^k - g, v_h) = 0$$

unter der Voraussetzung $|p_h^k| \leq 1$ in Ω für alle $(v_h, q_h) \in S^1(\mathscr{T}_h) \times \mathscr{L}^0(\mathscr{T}_h)^d$ mit $|q_h| \leq 1$ in Ω.
Stoppe die Iteration, falls $\|d_t u_h^k\|_{h,s} < \varepsilon_{\text{stop}}$.
Implementieren Sie den beschriebenen Algorithmus und testen Sie Ihr Programm mit $\Omega = (-1, 1)^2$, $\alpha = 100$, $g = I_{B_{0.4}(0)}$, $s = \frac{1}{2}$, $\tau = \frac{1}{10} h^{1/2}$ und $\varepsilon_{\text{stop}} = 0,01$.
Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie für $s = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ und $\tau = \frac{1}{10} h^{1/4}, \frac{1}{10} h^{1/2}, \frac{1}{10} h$ sowie verschiedene Werte von h jeweils die Anzahl der benötignten Iterationsschritte verzeichnen. Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Die Bedingung

$$(-d_t p_h^k + \nabla \tilde{u}_h^k, q_h - p_h^k) \leq 0, \quad |p_h^k| \leq 1 \;\; \text{in } \Omega$$

für alle $q_h \in \mathscr{L}^0(\mathscr{T}_h)^d$ mit $|q_h| \leq 1$ in Ω ist äquivalent zu

$$p_h^k = \frac{p_h^{k-1} + \tau \nabla \tilde{u}_h^k}{\max\{1, |p_h^{k-1} + \tau \nabla \tilde{u}_h^k|\}}.$$

Abgabe: Bis Sonntag, den 3. Februar 2019 an den Tutor.