Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020

Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 1 – 21.10.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 28.10.2019, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws19/tun3`

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** Sei $d \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ und $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$, sowie $u(x) = |x|^s$ für $x \in \Omega \setminus \{0\}$.
(i) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, sodass $u \in L^p(\Omega)$.
(ii) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, sodass $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)**.** Sei $\Omega = \{r(\cos\varphi, \sin\varphi) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$, $\Gamma_{\mathrm{D}} = \partial\Omega$ und

$$u_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi \in \{0, 3\pi/2\}, \\ \sin(2\varphi/3), & \text{falls } r = 1. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass für $f = 0$ durch

$$u(r, \varphi) = r^{(2/3)} \sin(2\varphi/3)$$

eine schwache Lösung des Poisson-Problems in Ω gegeben ist.
(ii) Folgern Sie, dass das Poisson-Problem im Allgemeinen nicht H^2-regulär ist, wenn das Lösungsgebiet nicht konvex ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ eine Familie von Triangulierungen des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit maximaler Gitterweite $h \to 0$.
(i) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{h>0} \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt.
(ii) Beweisen Sie, dass Galerkin-Approximationen des Poisson-Problems immer gegen die exakte Lösung konvergieren.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $u \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für

$$\overline{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega u \, \mathrm{d}x$$

die Gleichung $\|u - \overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = \min_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - |\Omega||\overline{u}|^2$ erfüllt ist.