Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 2 – 28.10.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 04.11.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $\widetilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla u(x) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_r \widetilde{u}(r,\phi) \\ r^{-1}\partial_\phi \widetilde{u}(r,\phi) \end{bmatrix}$$

für $x = r(\cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt. Folgern Sie, dass $|\nabla u|^2 = (\partial_r \widetilde{u})^2 + r^{-2}(\partial_\phi \widetilde{u})^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sie $u \in H^1(\Omega)$ die Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω mit der Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = u_{\mathrm{D}}$ für eine gegebene Funktion $u_{\mathrm{D}} \in C(\partial\Omega)$. Für eine Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von Ω sei $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ die Galerkin-Approximation mit $u_h(z) = u_{\mathrm{D}}(z)$ für alle $z \in \mathcal{N}_h \cap \partial\Omega$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Abschätzung

$$\|\nabla(u - u_h)\| \le \|\nabla(u - v_h)\|$$

für alle Funktionen $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ mit $v_h(z) = u_{\mathrm{D}}(z)$ für alle $z \in \mathcal{N}_h \cap \partial\Omega$.

Aufgabe 3 (4+1 Punkte)**.** Es sei $X = H_0^1(\Omega)$. Wir betrachten für eine stetige, elliptische Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ das folgende allgemeine Problem: Gesucht ist zu $l \in X^*$ die variationelle Lösung $u \in X$, sodass

$$a(u,v) = l(v) \text{ für alle } v \in X.$$

Wir nehmen an, es gelte $u \in H^2(\Omega) \cap X$. Ferner sei das *adjungierte Problem* H^2-regulär, das heißt für $g \in L_2(\Omega)$ erfülle die Lösung von

$$a^*(z,\phi) = (g,\phi)_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } \phi \in X$$

die Abschätzung $\|D^2 z\|_{L^2(\Omega)} \le c\|g\|_{L^2(\Omega)}$. Hierbei ist $a^*(z,\phi) := a(\phi,z)$. Sei $X_h \subset X$ der Raum der stetigen, stückweisen P1-Funktionen mit Nullrandwerten und $u_h \in X_h$ die zugehörige Galerkin-Approximation.
(i) Beweisen Sie die L^2-Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^2\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tipp: Betrachten Sie das adjungierte Problem für $g = u - u_h$.
(ii) Sei κ in Ω divergenzfrei. Stellen Sie die starke Form des adjungierten Problems zu

$$-\Delta u + \kappa \cdot \nabla u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

auf.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die graduierten Gitter mit maximaler Gitterweite $h = 1/J$ auf dem Referenzelement T_{ref} für ein konstantes $\beta \ge 1$ eine Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_J^\beta)_{J\in\mathbb{N}}$ definieren, in der die kleinsten auftretenden Innenwinkel von unten gleichmäßig durch eine Konstante $\theta_{\min} > 0$ beschränkt sind.