Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 3 – 04.11.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 11.11.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $x \in (0,1)$ sowie $f(x) = x^s$. Konstruieren Sie ein Gitter $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, sodass für die nodale Interpolante $\mathcal{I}_n f$ von f auf diesem Gitter die Abschätzung $\|f - \mathcal{I}_n f\|_{L^\infty(0,1)} \leq c_s n^{-2}$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $\alpha > 0$ und $v \in C^2([0, 2\pi])$ periodisch auf $\mathbb{R}$. Leiten Sie eine Fehlerabschätzung für die Approximation der Singularitätsfunktion $u_\alpha(r, \phi) = r^\alpha v(\alpha\phi)$ auf einem graduierten Gitter des Referenzelements mit Graduierungsstärke $\beta > 1/\alpha$ her.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $T \subset \mathbb{R}^d$ ein Simplex und $S \subset \partial T$ eine Seitenfläche von T mit $h_S = \operatorname{diam}(S)$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\|v\|^2_{L^2(S)} \leq c^2_{\mathrm{tr}} (h_S^{-1} \|v\|^2_{L^2(T)} + h_S \|\nabla v\|^2_{L^2(T)})$$

für alle $v \in H^1(T)$ mit einer von h_S unabhängigen Konstanten $c_{\mathrm{tr}} > 0$.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** (i) Weisen Sie nach, dass die Clément-Quasi-Interpolation $\mathcal{J}_h : H^1_{\mathrm{D}}(\Omega) \to \mathcal{S}^1_{\mathrm{D}}(\mathcal{T}_h)$ *keine* Projektion ist.
(ii) Vergleichen Sie Approximationsresultate, Definitionsbereiche, und Projektionseigenschaften der nodalen Interpolante $\mathcal{I}_h$ und der Clément-Quasi-Interpolante $\mathcal{J}_h$ im Finite-Elemente-Raum $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$.