Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 4 – 11.11.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 18.11.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $\mathcal{T}_h$ die Triangulierung von $\Omega = (0,1)^2$ bestehend aus vier entlang der zum Vektor $(1,1)$ parallelen Diagonalen halbierten Quadraten. Sei außerdem $u(x,y) = xy$ sowie $u_h = \mathcal{I}_h u$. Berechnen Sie die Sprünge $[\![\nabla u_h \cdot n_S]\!]$ für alle inneren Seiten S.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ die schwache Lösung des Poisson-Problems mit gemischten Randwerten

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\Gamma_\mathrm{D}} = 0, \quad \partial_n u|_{\Gamma_\mathrm{N}} = g,$$

und $u_h \in \mathcal{S}^1_\mathrm{D}(\mathcal{T}_h)$ die zugehörige Galerkin Approximation. Beweisen Sie die A-Posteriori-Abschätzung

$$\|\nabla(u - u_h)\| \le c_r \eta(u_h)$$

mit einer Konstaten $c_r > 0$, wobei $\eta(u_h)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2(u_h)$ mit

$$\eta_T^2(u_h) = h_T^2 \|f\|^2_{L^2(T)} + \sum_{S \in \mathcal{S}_h, S \subset \partial T} h_S \|[\![\nabla u_h \cdot n_S]\!]\|^2_{L^2(S)}$$

und $[\![\nabla u_h \cdot n_S]\!] = \nabla u_h \cdot n - g$ für $S \subset \partial T \cap \overline{\Gamma}_\mathrm{N}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie: Es existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass für alle $h > 0$ und alle $T \in \mathcal{T}_h$ mit $T = \mathrm{conv}\{z_1, z_2, \dots, z_{d+1}\}$ für die Element-Bubble-Funktion $b_T = \varphi_{z_1}\varphi_{z_2} \dots \varphi_{z_{d+1}} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt

$$\operatorname{supp} b_T \subset T, \quad \int_T b_T = c_1 |T|, \quad \|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \le c_2 h_T^{d/2-1}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ oder $d = 3$, und $w_h \in \mathcal{S}^k(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_T \in \mathcal{P}_k(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$ sowie $S \in \mathcal{S}_h$, sodass $S = T_1 \cap T_2$ für $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$. Zeigen Sie, dass der (schwache) Gradient die Gleichung

$$\nabla w_h|_{T_1}(x) \cdot \tau_S = \nabla w_h|_{T_2}(x) \cdot \tau_S$$

für alle $x \in S$ erfüllt, wobei τ_S ein beliebiger Tangentialvektor zu S ist.