Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 5 – 18.11.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 25.11.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $v \in L^1(\Omega)$ und $\mathcal{J}_h v$ die Clément-Interpolante für eine Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{J}_h v \to v$ in $L^1(\Omega)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Konstruieren Sie zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ des Gebiets $\Omega = (0,1)^2$ sowie eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$, sodass die zugehörigen Galerkin-Approximationen u_1 und u_2 des Poisson-Problems übereinstimmen, jedoch nicht der exakten Lösung entsprechen. Zeigen Sie, dass sich der Residuums-Fehlerschätzer im Gegensatz zum tatsächlichen Fehler beim Übergang von $\mathcal{T}_1$ zu $\mathcal{T}_2$ verringert.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)**.** Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω sowie $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des gestörten Problems $-\Delta \widetilde{u} = \widetilde{f}$.
(i) Zeigen Sie, dass durch $\eta = \|f - \widetilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$ ein zuverlässiger Schätzer für den Fehler $\|\nabla(u - \widetilde{u})\|_{L^2(\Omega)}$ definiert ist.
(ii) Beweisen Sie Zuverlässigkeit und Effizienz des Schätzers $\widetilde{\eta} = \|f - \widetilde{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}$ mit $\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{(v,w)_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}}$ für $v \in L^2(\Omega)$.
(iii) Ist der Schätzer aus (i) ebenfalls effizient? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (3+2 Puntke)**.** Sei $z \in \mathcal{N}_h$ und $S_z \in \mathcal{S}_h$, sodass $z \in S_z$.
(i) Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\psi_z \in \mathcal{P}_1(S_z)$ gibt, sodass für alle $z' \in \mathcal{N}_h$ gilt

$$\int_{S_z} \psi_z \varphi_{z'} dvs = \delta_{zz'}.$$

(ii) Beweisen Sie, dass $\|\psi_z\|_{L^\infty(S_z)} \le c h_z^{-(d-1)}$.