Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Korrektur zu Blatt 7 – 05.12.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 09.12.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Für $\tau > 0$, eine feste Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von Ω, und $\theta \in [0,1]$, ist die Finite-Elemente-Variante des θ-Verfahrens für die Wärmeleitungsgleichung definiert durch

$$(d_t U^j, V) + (\nabla[(1-\theta)U^{j-1} + \theta U^j], \nabla V) = (f(t_{j-1+\theta}), V)$$

für $j = 1, 2, \ldots, J$, und alle $V \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$, wobei $t_{j-1+\theta} = (j-1+\theta)\tau$.
(i) Zeigen Sie, dass die Iterierten $(U^j)_{j=1,\ldots,J}$ wohldefiniert sind.
(ii) Beweisen Sie, dass für alle $\ell = 1, 2, \ldots, J$ gilt

$$\frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\|d_t U^j\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla U^\ell\|^2 + (\theta - \frac{1}{2})\tau^2\sum_{j=1}^{\ell}\|\nabla d_t U^j\|^2 \leq \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\|f(t_{j-1+\theta})\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla U^0\|^2.$$