Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 7 – 02.12.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 09.12.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $\varphi_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ die nodale Basisfunktion zu einem Knoten $z \in \mathcal{N}_h$. Zeigen Sie, dass für alle $p \in [1, \infty]$ eine Konstante $c_z > 0$ existiert, sodass

$$\|\nabla^\ell \varphi_z\|_{L^p(\omega_z)} \le c_z h_z^{d/p-\ell}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet sowie $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von Ω. Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $\widetilde{f}$ die elementweise konstante Funktion auf $\mathcal{T}_h$, welche durch die Mittelwerte von f auf jedem Element $T \in \mathcal{T}_h$ gegeben ist. Seien $u, \widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ die schwachen Lösungen des Poisson-Problems mit rechter Seite f beziehungsweise $\widetilde{f}$. Wir nehmen an, dass $f|_T \in H^1(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_P > 0$ gibt, sodass gilt

$$\|\nabla(u - \widetilde{u})\| \le c_P h_{\max}^2 \|\nabla_{\mathcal{T}} f\|,$$

wobei $h_{\max} > 0$ die maximale Gitterweite in $\mathcal{T}_h$ und $\nabla_{\mathcal{T}} f$ der elementweise Gradient von f ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Triangulierungen von Ω, sodass $\mathcal{T}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T}_1$ ist und die beiden Triangulierungen auf dem Teilgebiet $\Omega' \subset \Omega$ übereinstimmen. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Galerkin-Approximationen $u_j \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_j)$, $j = 1, 2$ im Allgemeinen nicht $u_1 = u_2$ in Ω' gilt.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Für $\tau > 0$, eine feste Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von Ω, und $\theta \in [0, 1]$, ist die Finite-Elemente-Variante des θ-Verfahrens für die Wärmeleitungsgleichung definiert durch

$$(d_t U^j, V) + (\nabla[(1-\theta)U^{j-1} + \theta U^j], \nabla V) = (f(t_{j-1+\theta}), V)$$

für $j = 1, 2, \dots, J$, und alle $V \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$, wobei $t_{j-1+\theta} = (j - 1 + \theta)\tau$.
(i) Zeigen Sie, dass die Iterierten $(U^j)_{j=0,\dots,J}$ wohldefiniert sind.
(ii) Beweisen Sie, dass für alle $\ell = 1, 2, \dots, J$ gilt

$$\frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\ell} \|d_t U^j\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla U^j\|^2 + (\theta - 1/2)\tau \sum_{j=1}^{\ell} \|\nabla d_t U^j\|^2 \le \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\ell} \|f(t_{j-1+\theta})\|^2.$$