Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020

Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 8 – 09.12.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 16.12.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie eine A-Posteriori-Fehlerabschätzung für die Approximation des Randwertproblems

$$-\Delta u + u = f \text{ in } \Omega, \quad \partial_n u = g \text{ on } \Gamma_{\mathrm{N}} = \partial\Omega.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei X ein Banach-Raum und $f : [a,b] \to X$ affin. Zeigen Sie, dass für alle $t \in [a,b]$ gilt

$$\|f(t) - f(a)\| \leq \|f(b) - f(a)\|.$$

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass für hinreichend reguläre Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gilt

$$\int_0^T \|\partial_t u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\nabla u(T)\|^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2.$$

(ii) Beweisen Sie, dass schwache Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eindeutig sind.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte)**.** Für eine Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $P_{h,0} : L^2(\Omega) \to \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ die L^2-Projektion, die für $f \in L^2(\Omega)$ definiert ist durch

$$(P_{h,0} f, V) = (f, V)$$

für alle $V \in \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$.
(i) Zeigen Sie, dass durch $P_{h,0}$ ein stetiger linearer Operator $P_{h,0} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert ist.
(ii) Der diskrete Laplace-Operator Δ_h ist für Funktionen $W \in \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ definiert durch

$$(-\Delta_h W, V) = (\nabla W, \nabla V)$$

für alle $V \in \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$. Beweisen Sie, dass dadurch eine Bijektion $-\Delta_h : \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h) \to \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ definiert ist.
(iii) Zeigen Sie, dass die Galerkin-Approximation $u_h \in \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ des Poisson-Problems mit rechter Seite $f \in L^2(\Omega)$ gegeben ist durch

$$u_h = (-\Delta_h)^{-1} P_{h,0} f.$$