Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 9 – 16.12.2019

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 13.01.2020, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)**.** Für eine Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ sei $(u_h)_{h>0}$ die zugehörige Folge von Galerkin-Approximationen $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ des Poisson-Problems mit rechter Seite $f \in L^2(\Omega)$ und exakter Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.
(i) Beweisen Sie, dass für alle $h > 0$ gilt

$$\|\Delta_h u_h\| \leq \|f\|.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\Delta_h u_h \to \Delta u$ in $L^2(\Omega)$ für $h \to 0$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Verwenden Sie die elliptische Rekonstruktion, um konkrete Fehlerabschätzungen mit Fehlerindikatoren $\eta_{T,\text{space}}$ und $\eta_{T,\text{temp}}$ für die Approximation der Wärmeleitungsgleichung mit variabler Zeitschrittweite und Finite-Elemente-Gittern herzuleiten.

Quiz (10 Punkte)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Ein graduiertes Gitter ist eine quasi-uniforme Triangulierung mit einer lokal feineren Auflösung in Richtung des Ursprungs.	
Die Koeffizienten V_z, die die Clément-Quasi-Interpolante definieren, resultieren aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems.	
Die lokale Poincaré-Ungleichung kontrolliert den Fehler bei der Approximation einer Funktion durch ihren Mittelwert.	
Für Funktionen aus $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_h)$ stimmt die Clément-Interpolante mit der nodalen Interpolante überein.	
Eine a-posteriori Fehlerabschätzung beschränkt den Approximationsfehler durch die Sprünge der exakten Lösung und berechenbare Terme.	
Durch einen effizienten Fehlerschätzer ist (bis auf einen konstanten Faktor) eine untere Schranke für den Fehler gegeben.	
Falls $\mathcal{T}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T}_k$ ist, so gilt $\|\nabla e_{k+1}\| \leq \|\nabla e_k\|$ für die Fehler $e_k = u - u_k$ bei der Galerkin-Approximation der Poisson-Gleichung.	
Die maximale Gitterweite in einer Folge adaptiv verfeinerter Triangulierungen geht immer gegen null.	
Bei der Scott-Zhang-Quasi-Interpolation bleiben stückweise affine Randdaten erhalten.	
Eine Gittervergröberung wird durch das Rückgängigmachen der neuesten Verfeinerungen einer gegeben Triangulierung realisiert.	

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!