Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 10 – 13.01.2020

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 20.01.2020, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei A_h die Steifigkeitsmatrix bezüglich eines Finite-Elemente-Raums $\mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$. Zeigen Sie, dass die Abschätzung $\operatorname{cond}_2(A_h) \le ch^{-2}$ optimal ist, das heißt, dass eine Konstante $c' > 0$ existiert, sodass $\operatorname{cond}_2(A_h) \ge c'h^{-2}$. Betrachten Sie dazu zunächst den eindimensionalen Fall $d = 1$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $P : \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_H) \to \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h)$ der Prolongationsoperator zwischen zwei geschachtelten Finite-Elemente-Räumen $\mathcal{T}_h$ und $\mathcal{T}_H$. Zeigen Sie, dass die Transponierte $P^\top$ einen Operator $\mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_h) \to \mathcal{S}^1_0(\mathcal{T}_H)$ definiert, der weder mit dem Inversen von P noch mit der nodalen Interpolante auf $\mathcal{T}_H$ übereinstimmt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ und $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ sodass $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Sei außerdem $\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ und $\Gamma_j = \partial\Omega \cap \partial\Omega_j$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

genau dann gilt, wenn die Funktionen $u_j = u|_{\Omega_j}$, $j = 1, 2$, die Bedingungen

$$-\Delta u_j = f \text{ in } \Omega_j, \quad u_j|_{\Gamma_j} = 0,$$

für $j = 1, 2$ und

$$u_1 = u_2, \quad \partial_{n_1} u_1 = -\partial_{n_2} u_2,$$

auf dem Interface γ erfüllen, wobei $\partial_{n_j} u_j = \nabla u_j \cdot n_j$ auf γ mit der äußeren Einheitsnormale n_j an $\partial\Omega_j$, das heißt $n_2 = -n_1$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für $\Omega = (0, 1)$, $f = 0$ und die Partition $\Omega_1 = (0, a)$, $\Omega_2 = (a, 1)$ mit $0 < a < 1/2$ die Dirichlet-Neumann-Methode genau dann konvergiert, wenn $\theta < 1$.