# Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 11 – 20.01.2020

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 27.01.2020, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 1** (5 Punkte)**.** Sei $A_h$ die Systemmatrix, die aus der $P_1$-Finite-Elemente-Diskretisierung des elliptischen Randwertproblems

$$-\Delta u + \alpha u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

resultiert. Leiten Sie eine obere Schranke für die Konditionszahl mit einer expliziten Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \geq 0$ her.

**Aufgabe 2** (5 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass jedes stationäre Paar $(u_1, u_2)$ in der Dirichlet-Neumann-Methode mit der Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Poisson-Problems mit rechter Seite $f$ übereinstimmt, also dass $u_j = u|_{\Omega_j}$ für $j = 1, 2$.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**.** Formulieren Sie die Dirichlet-Neumann-Methode für Partitionen welche aus mehr als zwei Teilgebieten bestehen.

**Aufgabe 4** (2+3 Punkte)**.** Sei $\Omega_1, \Omega_2$ eine nicht-überlappende Partition von $\Omega$ mit Interface $\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.
(i) Konstruieren Sie Diffeomorphismen $\Phi_j : \Omega_j \to \omega_j$ für $j = 1, 2$, mit Mengen $\omega_1 \subset \Omega_2$ und $\omega_2 \subset \Omega_1$, sodass $\Phi_j(\gamma) = \gamma$ für $j = 1, 2$.
(ii) Zeigen Sie, dass durch die Ausdrücke $|||\psi|||_j = \|\nabla H_j \psi\|_{L^2(\Omega_j)}$ mit der harmonischen Fortsetzung $H_j\psi$ von $\psi$ auf $\Omega_j$, $j = 1, 2$, äquivalente Normen auf $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ gegeben sind.