Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 12 – 27.01.2020

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 03.02.2020, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei Ω_1, Ω_2 eine überlappende Partition von Ω mit Overlap $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ wie in der Schwarz-Methode. Wir bezeichnen mit P_1 die H^1-Projektion auf den Teilraum $H_0^1(\Omega_1)$, welche für $u \in H_0^1(\Omega)$ definiert ist durch

$$(\nabla P_1 u, \nabla v) = (\nabla u, \nabla v)$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega_1)$.Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage: Für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $u|_{\Omega\setminus\Omega_2} = P_1 u|_{\Omega\setminus\Omega_2}$.

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)**.** Sei $b \in \mathbb{R}^n$, sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und sei $\phi(x) = (A^{-1}(b - Ax)) \cdot (b - Ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für eine Approximation $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ wird beim Abstiegsverfahren die Suchrichtung $\widetilde{d} = -\nabla\phi(\widetilde{x})$ verwendet.
(i) Zeigen Sie, dass $\widetilde{d} = b - A\widetilde{x}$ gilt und bestimmen Sie die Minimalstelle $\widetilde{\alpha}$ der Funktion $t \mapsto \phi(\widetilde{x} + t\widetilde{d})$.
(ii) Zeigen Sie, dass mit dem optimalen $\widetilde{\alpha}$ und $\widetilde{x}^{neu} = \widetilde{x} + \widetilde{\alpha}\widetilde{d}$ gilt

$$\|\widetilde{x}^{neu} - x^*\|_A^2 = \|\widetilde{x} - x^*\|_A^2 \Big(1 - \frac{\|\widetilde{d}\|^4}{(\widetilde{d} \cdot A\widetilde{d})(\widetilde{d} \cdot A^{-1}\widetilde{d})}\Big).$$

(iii) Sei $\kappa = \mathrm{cond}_2(A) = \lambda_{min}^{-1}\lambda_{max}$ die Konditionszahl von A. Verwenden Sie ohne Beweis die für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gültige Abschätzung

$$\frac{(x \cdot Ax)(x \cdot A^{-1}x)}{\|x\|^4} \le \frac{(\lambda_{min}^{-1} + \lambda_{max})^2}{4\lambda_{min}\lambda_{max}},$$

um zu beweisen, dass

$$\|\widetilde{x}^{neu} - x^*\|_A \le \Big(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\Big)\|\widetilde{x} - x^*\|_A.$$

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$, $t \in [-1, 1]$, eindeutig als Polynom auf $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt und für $|t| \ge 1$ gilt

$$T_k(t) = \frac{1}{2}\big(t + (t^2 - 1)^{1/2}\big)^k + \frac{1}{2}\big(t - (t^2 - 1)^{1/2}\big)^k.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $s > 1$ gilt

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{s^{1/2} + 1}{s^{1/2} - 1}\Big)^k \le T_k\Big(\frac{s + 1}{s - 1}\Big) \le \Big(\frac{s^{1/2} + 1}{s^{1/2} - 1}\Big)^k.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt dünnbesetzt, falls für die Anzahl N_{nz} der von 0 verschiedenen Einträge gilt $N_{nz} \le \mathcal{O}(n)$. Zeigen Sie, dass das Produkt dünnbesetzter Matrizen im Allgemeinen nicht dünnbesetzt ist.